

**Errata (9. Juli 2019)**

S. 251 — unten  $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$  statt  $\frac{\sqrt{x+1}-x}{x}$

S. 253 —  $D_\nu f(x_0)$  statt  $D_\nu f(x)$

S. 259 — an einer Stelle  $\xi \in (\alpha, \beta)$

S. 266 — Ersetze den Beweis von Satz 6.3.13 durch: Zu  $x_0 \in \Omega$  definieren wir  $T \in L(\mathbb{R}^d, Y)$  durch  $Th := \sum_{j=1}^d h^j D_j f(x_0)$ . Es wird gefolgert, dass  $T$  die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  ist und (6.3m) gilt. Mit  $r > 0$  so klein, dass  $B_r(x_0) \subseteq U$  ist, setzen wir für  $h \in B_r(0)$  weiter

$$x_j(h) := x_0 + \sum_{i=1}^j h^i e_i \quad \text{für alle } 0 \leq j \leq d$$

und stets gilt die Grenzbeziehung  $\lim_{h \rightarrow 0} x_j(h) = x_0$ . Die Hilfsfunktionen

$$\phi_j : [0, 1] \rightarrow Y, \quad \phi_j(t) := f(x_{j-1}(h) + th^j e_j) - f(x_{j-1}(h)) - th^j D_j f(x_{j-1}(h))$$

sind differenzierbar auf  $[0, 1]$  mit der Ableitung

$$\begin{aligned} \phi_j'(t) &\stackrel{(6.1n)}{=} h^j D_j f(x_{j-1}(h) + th^j e_j) e_j - h^j D_j f(x_{j-1}(h)) \\ &\stackrel{(6.2c)}{=} h^j D_j f(x_{j-1}(h) + th^j e_j) - h^j D_j f(x_{j-1}(h)) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq d. \end{aligned}$$

Wir erhalten nun die Darstellung  $f(x_0 + h) - f(x_0) - Th = S_1 + S_2$  mit den Summen

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{j=1}^d \left( f(x_j(h)) - f(x_{j-1}(h)) - h^j D_j f(x_{j-1}(h)) \right), \\ S_2 &:= \sum_{j=1}^d h^j (D_j f(x_{j-1}(h)) - D_j f(x_0)), \end{aligned}$$

deren Normen separat abgeschätzt werden. Hinsichtlich der Glieder von  $S_1$ , wendet man den Schrankensatz 6.3.11 auf die Funktionen  $\phi_j$  an und erhält wegen  $\phi_j(0) = 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| f(x_j(h)) - f(x_{j-1}(h)) - h^j D_j f(x_{j-1}(h)) \right\| &= \|\phi_j(1) - \phi_j(0)\| \\ &\stackrel{(6.3k)}{\leq} \sup_{\tau \in [0,1]} \|\phi_j'(\tau)\| \leq \rho_j^1(h) |h^j| \end{aligned}$$

mit der Restfunktion

$$\rho_j^1(h) := \sup_{\tau \in [0,1]} \left\| D_j f(x_{j-1}(h) + \tau h^j e_j) - D_j f(x_{j-1}(h)) \right\|.$$

In den Summanden von  $S_2$  sei  $\rho_j^2(h) := \|D_j f(x_{j-1}(h)) - D_j f(x_0)\|$ . Da jedes  $D_j f$  nach Voraussetzung stetig in  $x_0$  ist, resultiert  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho_j^i(h) = 0$  für alle  $i = 1, 2$

und  $1 \leq j \leq d$ . Weil jede Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  nach Bsp. 5.3.25 äquivalent zur Maximums-Norm  $\|\cdot\|_\infty$  ist, impliziert dies

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\| &\leq \|S_1\| + \|S_2\| \leq \sum_{j=1}^d (\rho_j^1(h) + \rho_j^2(h)) |h^j| \\ &\leq \rho(h) \|h\|_\infty \stackrel{(5.3j)}{\leq} C\rho(h) \|h\| \quad \text{für alle } h \in B_r(0) \end{aligned}$$

mit dem Restglied  $\rho(h) := \sum_{j=1}^d (\rho_j^1(h) + \rho_j^2(h))$  und einer reellen Konstanten  $C > 0$ . Aus den Eigenschaften der einzelnen Summanden resultiert  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$  und Satz 6.1.2(b) liefert die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$ . Da Ableitungen eindeutig sind, gilt  $Df(x_0) = T$  nach Satz 6.1.4. Mittels (6.3m) überträgt sich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in  $x_0$  auf die Ableitung.

S. 270 — Ist dann  $D_j D_i f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig

S. 273 — Kor. 6.4.6 benötigt die Voraussetzung  $Y = \mathbb{R}^m$

S. 281 — Ersetze Bsp. 6.5.5 durch: Für die reelle Potenzreihe

$$\left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ermittelt man leicht den Konvergenzradius 1 und Satz 6.5.4 garantiert eine differenzierbare Grenzfunktion  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Hierbei ergibt sich die Ableitung zu

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \stackrel{(4.1g)}{=} \frac{1}{1+x} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

und ein Blick auf Tab. 6.1 zeigt die Identität  $\ln'(1+x) \equiv f'(x)$  auf  $(-1, 1)$ . Also verschwindet die Ableitung von  $x \mapsto \ln(x+1) - f(x)$  und mittels Kor. 6.3.12 muss diese Funktion daher konstant auf  $(-1, 1)$  sein. Wegen  $\ln 1 = f(0)$  erhält man

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

als Potenzreihendarstellung des natürlichen Logarithmus. Dass hierin sogar zum einseitigen Grenzwert  $x \nearrow 1$  übergegangen werden kann, zeigen wir als Nächstes. Dieser würde nämlich die Reihensumme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

der alternierenden harmonischen Reihe aus Bsp. 4.2.13 liefern. Um also nachzuweisen, dass die Potenzreihe  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  stetig nach 1 fortgesetzt werden kann, verfahren wir wie folgt: Mit  $b_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) x^k = (1-x) \sum_{k=1}^n b_k x^k + b_n x^{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und im Limes  $n \rightarrow \infty$  implizierten  $|x| < 1$ ,  $b_0 = 0$ , dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \text{für alle } |x| < 1. \quad (0.0a)$$

Weil die alternierende harmonische Reihe konvergiert, existiert der Grenzwert  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $K \in \mathbb{N}$  mit

$$|b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k > K, \quad (0.0b)$$

wie auch ein  $\delta > 0$ , so dass

$$(1-x) \sum_{k=0}^{K-1} |b_k - b| |x|^k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in (1-\delta, 1).$$

Wegen  $(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1$  erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |\ln(x+1) - b| &\stackrel{(6.5e)}{=} \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b) x^k \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{k=0}^{K-1} |b_k - b| x^k + (1-x) \sum_{k=K}^{\infty} |b_k - b| x^k \\ &\stackrel{(6.5f)}{\leq} (1-x) \sum_{k=0}^{K-1} |b_k - b| x^k + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (1-\delta, 1) \end{aligned}$$

und damit resultiert  $\ln 2 = \lim_{x \nearrow 1} \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ .

S. 285 — dem Limes  $\lim_{h \rightarrow 0}$

S. 286 — Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf

S. 286 — durch  $f^{(k+1)}(x_0)$

S. 291 — mit  $x - Ax = y$  gibt.

S. 297 — Eine Abbildung  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$

S. 297 — insofern  $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$

S. 297 — und  $\Omega'_0 \subseteq f(\Omega)$

S. 299 — nahe der Lösung  $(x^*, y^*) = (2, 4)$  nach  $y$  auflösen kann, d.h. es existiert eine Funktion  $\eta$  mit  $\eta(2) = 4$  und  $x^{\eta(x)} = \eta(x)^x$  in einer Umgebung von 2.

S. 300 —  $\exists \rho > 0: \forall x \in \dot{B}_\rho(x_0): f(x) < f(x_0)$

S. 304 — mit  $x_0 + tx_1 \in \dot{B}_\rho(x_0)$  liefert

S. 313 — ein  $c \in Y$  mit  $F_2(x) \equiv F_1(x) + c$  und  $F'_1(x) \equiv f(x)$  auf  $I$  gibt.

S. 313 — für alle  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ ;

S. 316 — äquivalent zu  $\phi(u) = \frac{1}{2u} - \frac{u}{2}$  und wir erhalten mittels

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\phi'(u)}{u+\phi(u)} du = - \int \frac{du}{u} \simeq \ln|u| = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arsinh} x$$

S. 340 — überabzählbare Nullmenge

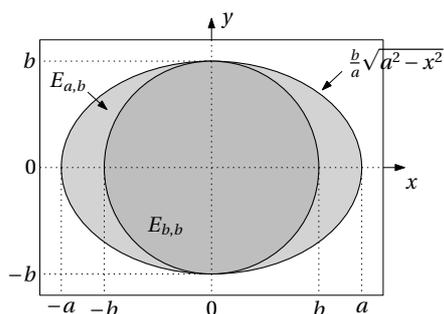
S. 340 —  $\sum_{j=1}^{\infty} J_d(Q_j) = 2^d \sum_{j=1}^{\infty} J_d(R_j) \leq \varepsilon$

S. 348 — beispielsweise jede stetige Funktion  $f: Q \rightarrow Y$

S. 352 — die charakteristische Funktion  $\chi_{\{x_0\}}: Q \rightarrow \mathbb{R}$

S. 363 — (allgemeiner bei  $J_d(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$ )

S. 371 — korrekte Abb. 7.16:



S. 372 — Das zentrale Résumé

S. 373 — Eine Begründung dieser

S. 375 — der Wohldefiniertheit von  $\Gamma$

S. 395 — diese Schnittmengen lauten  $K_{\Omega}^h(\eta) = \frac{h-\eta}{h} \Omega$

S. 398 — sowie  $\det D\phi(r, \theta, z) = r$

S. 403 — korrekte Jacobi-Matrix für Kugelkoordinaten

$$D\phi(r, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & -r \sin\theta \cos\psi & -r \cos\theta \sin\psi \\ \sin\theta \cos\psi & r \cos\theta \cos\psi & -r \sin\theta \sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r \cos\psi \end{pmatrix}$$

S. 403 — korrekte Abb. 7.36:

