

Analysis auf Maßketten

Christian Pötzsche

Lehrstuhl für nichtlineare Analysis

Universität Augsburg

Institut für Mathematik

Universitätsstraße 14

D-86135 Augsburg

e-mail: christian.poetzsche@math.uni-augsburg.de

11. April 2002

Zusammenfassung

Der auf HILGER [20] zurückgehende Maßkettenkalkül gestattet eine einheitliche Beschreibung von (eindimensionaler) Differenzial- und Differenzenrechnung. Insbesondere erwähnenswert ist hierbei, dass der Definitionsbereich der betrachteten Abbildungen nicht die algebraische Struktur einer Gruppe besitzen muss, sondern lediglich die topologischen Eigenschaften einer abstrakten Maßkette. Ausblickend ist man damit in der Lage, diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme — im Rahmen der sog. dynamischen Gleichungen — einheitlich zu beschreiben.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, den axiomatischen Aufbau des Maßkettenkalküls umfassend darzulegen, sowie die wesentlichen Resultate seiner Differenzial- und Integralrechnung vorzustellen.

Warnung: Die Arbeit ist nicht rigoros Korrektur-gelesen!!! Daher sind jegliche Verbesserungsvorschläge herzlich willkommen...

Inhaltsverzeichnis

Einführung	iv
Bemerkungen zur Notation	v
1 Ketten	1
2 Die Ordnungstopologie	3
3 Sprungoperatoren	5
4 Maßketten	8
5 Zeitskalen	19
6 Differenziation	22
7 Stammfunktion und Integration	34
8 Die Exponentialfunktion	46
9 Integralungleichungen	56
10 Kontraktionsprinzipien	60
A Symbolverzeichnis	68
Index	71

Einführung

In der mathematischen Beschreibung dynamischer Prozesse ist die Zeit üblicherweise entweder durch eine reelle oder eine ganzzahlige Variable gegeben. Welche der beiden Möglichkeiten gegebenenfalls vorzuziehen ist, hängt von dem zu modellierenden Phänomen und dem mathematischen Hintergrund ab. Auf der einen Seite liefert die umfangreiche und gut entwickelte Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen eine breite Basis, um dynamische Prozesse mit kontinuierlicher Zeit zu verstehen. Andererseits erlebt die diskrete Dynamik in Hinblick auf die Diskretisierungstheorie und eine direkte Beschreibung diskreter Modelle gegenwärtig eine Renaissance. Der in der Dissertation HILGER [20] entwickelte Maßkettenkalkül gestattet nun eine einheitliche Beschreibung sowohl kontinuierlicher, als auch diskreter dynamischer Prozesse und birgt daher eine Reihe von Vorteilen in sich:

- Die Vielzahl analoger Resultate für Differenzial- und Differenzgleichungen muss nicht doppelt bewiesen werden.
- Bei der Übertragung von Ergebnissen aus der kontinuierlichen auf die diskrete Dynamik läuft man nicht Gefahr, bei Analogie-Schlüssen Fehler zu begehen.
- Der Maßkettenkalkül ist derart allgemein, dass er auch „inhomogene“ Zeitskalen zulässt, wie sie etwa bei numerischen Verfahren mit variabler Schrittweite oder gewissen impulsiven Differenzialgleichungen auftreten.

Gegenstand dieser Arbeit ist es nun, eine solide axiomatische Begründung des Maßkettenkalküls zu liefern und darauf aufbauend eine Differenzial- und Integralrechnung zu entwickeln. Auf die Theorie dynamischer Gleichungen wird dagegen nicht eingegangen.

Daher sollen zunächst einige Referenzen zum Maßkettenkalkül gegeben werden, welche sich in folgende Gruppen einteilen lassen und wobei keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird:

Allgemeine Resultate: Neben der oben schon erwähnten Arbeit HILGER [20], besitzen auch AULBACH [5], AULBACH & HILGER [6, 7] und HILGER [21, 22] einführenden Charakter, wobei die beiden letztgenannten am umfangreichsten sind. Hier werden die Konzepte der Stetigkeit, Differenzierbarkeit und der Stammfunktionen auf Maßketten entwickelt. Ferner ist an dieser Stelle noch HILGER [25] zu nennen.

Als Monographien sind mittlerweile LAKSHMIKANTHAM, SIVASUNDARAM & KAYMAKÇALAN [34] und BOHNER & PETERSON [10]¹⁾ aufzuführen, wovon erstere aber bedauerlicherweise nicht sehr sorgfältig geschrieben wurde. Beide beinhalten eine Vielzahl zusätzlicher Referenzen. Weiterführende Resultate zum Maßkettenkalkül liefern des Weiteren AGARWAL & BOHNER [2] (Taylor'sche Formel, Regel von de l'Hospital) oder HILGER [26] (spezielle Funktionen, Fourier und Laplace-Transformationen). Ein Riemann-Stieltjes-Integral für stetige Integranden wird in SAILER [40] entwickelt.

Eine Reihe technischer Schwierigkeiten verschwinden, wenn man sich auf sog. homogene Zeitskalen — welche genau Differenzial- und Differenzgleichungen beschreiben — beschränkt, wie in DÖFFINGER [14] geschehen.

Dynamische Gleichungen: Dynamische Gleichungen sind die Verallgemeinerung (nichtautonom) gewöhnlicher Differenzial- und Differenzgleichungen im Rahmen des Maßkettenkalküls. Nahezu sämtliche oben genannten Arbeiten beschäftigen sich auch auf einführendem Niveau mit ihnen. Die bekannten Sätze von Peano und Perron werden in KAYMAKÇALAN [29] für endlich-dimensionale Gleichungen bewiesen. Qualitative Resultate über das asymptotische Verhalten dynamischer Gleichungen sind bei BOHNER & LUTZ [8] zu finden. Weitere Arbeiten die sich mit Anfangswertproblemen beschäftigen sind ANDERSON & PETERSON [4], ERBE & PETERSON [16] (Vergleichsresultate), LAKSHMIKANTHAM & SIVASUNDARAM [31] (Lyapunov-Funktionen) oder ZAFER, KAYMAKÇALAN & ÖZGÜN [43] für asymptotische Eigenschaften von Gleichungen höherer Ordnung.

Randwertprobleme: Es gibt eine wachsende Anzahl von Arbeiten über Randwertprobleme für dynamische Gleichungen, welche von ERBE & HILGER [15] initiiert wurden. Neuere Resultate liefern wieder ERBE & PETERSON [16, 17] (positive Lösungen).

¹⁾Eine frühe Version des ersten Kapitels findet man in BOHNER & PETERSON [9].

Invariante Mannigfaltigkeiten: Eine allgemeine Theorie für Zentrumsmanigfaltigkeiten nichtautonomer Gleichungen wurde bereits in HILGER [20] entwickelt. Die Existenz und Glattheit pseudohyperbolischer invarianter Mannigfaltigkeiten wurde in HILGER [23] bewiesen und ein Satz von Hartman-Grobmann kann bei HILGER [24] gefunden werden.

Diskretisierung: Die Diskretisierungstheorie beschäftigt sich mit folgender Problemstellung: Welche qualitativen Eigenschaften eines kontinuierlichen dynamischen Systems bleiben unter Diskretisierung mit einem numerischen Verfahren erhalten? Ein erster Schritt derartige Fragen im Rahmen des Maßkettenkalküls zu behandeln, wurde in HILGER & KLOEDEN [27, 28] gemacht. Hinsichtlich der Diskretisierung invarianter Mannigfaltigkeiten beinhaltet KELLER [30] sehr allgemeine Ergebnisse.

Bemerkungen zur Notation

Auf diesen ersten Seiten sollen einige Bezeichnungen und Sachverhalte dargelegt werden, die für alles Weitere grundlegend sind.

Allgemeine Bezeichnungen: Wie in der mathematischen Literatur üblich bezeichnet

\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$,
\mathbb{N}_0	die nichtnegativen ganzen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$,
\mathbb{Z}	die ganzen Zahlen $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
\mathbb{Q}	den Körper der rationalen Zahlen,
\mathbb{R}	den Körper der reellen Zahlen,
\mathbb{R}_0^+	die nichtnegativen reellen Zahlen und
\mathbb{C}	den Körper der komplexen Zahlen.

Die leere Menge kennzeichnen wir mit dem Symbol \emptyset . $\max A$, $\min A$, $\sup A$ und $\inf A$ stehen für das Maximum, das Minimum, das Supremum bzw. das Infimum einer (geordneten) Menge A . Für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{F}$ eines Körpers \mathbb{F} (engl. *field*) und ein $\alpha \in \mathbb{F}$ schreiben wir

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{F} : a \in A, b \in B\}, \quad \alpha A := \{\alpha a \in \mathbb{F} : a \in A\}.$$

Lineare Räume und Abbildungen: Ist \mathcal{P} ein topologischer Raum und $A \subseteq \mathcal{P}$, so kennzeichnet \overline{A} den topologischen Abschluss der Menge A und $\partial A := \overline{A} \cap (\mathcal{X} \setminus A)$ ihren Rand.

Mit \mathcal{X} und \mathcal{Y} bezeichnen wir i.Allg. normierte Räume über dem Körper $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; für ihre Norm schreiben wir $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ respektive $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ oder nur $\|\cdot\|$, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. Für $x_0 \in \mathcal{X}$ und $\varepsilon > 0$ ist die offene Kugel um x_0 mit Radius ε als $B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathcal{X} : \|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon\}$ definiert.

Wichtige Klassen linearer Räume bilden die stetigen Homomorphismen $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ zwischen \mathcal{X} und \mathcal{Y} und die stetigen Endomorphismen $\mathcal{L}(\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X})$ auf \mathcal{X} . Für ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ normieren wir sie mit der induzierten Operatornorm

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})} := \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}}$$

und wir schreiben im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ häufig abkürzend $\|T\|$ für $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$. Die identische Abbildung auf dem linearen Raum \mathcal{X} wird mit $I_{\mathcal{X}}$ bezeichnet.

Abbildungen und Funktionenräume: Bezeichnen A_1, A_2 und B drei beliebige (nichtleere) Mengen und $\mathcal{F}(A_i, B)$ die Menge aller Abbildungen von A_i ($i \in \{1, 2\}$) nach B , so wird für (nichtleere) Teilmengen $\mathcal{F}_i(A_i, B) \subseteq \mathcal{F}(A_i, B)$ definiert

$$(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)(A_1 \times A_2, B) := \left\{ f : A_1 \times A_2 \rightarrow B \mid \begin{array}{l} f(\cdot, a_2) \in \mathcal{F}_1(A_1, B) \text{ für alle } a_2 \in A_2, \\ f(a_1, \cdot) \in \mathcal{F}_2(A_2, B) \text{ für alle } a_1 \in A_1 \end{array} \right\}.$$

Sind A und B Teilmengen topologischer Räume, so steht $\mathcal{C}^0(A, B)$ für die stetigen Funktionen und $\mathcal{C}^m(A, B)$ für die m -mal differenzierbaren Funktionen, deren m -te Ableitung noch stetig ist ($m \in \mathbb{N}$),

falls A und B offene Teilmengen von Banach-Räumen sind. Weiter steht $f|_{A_0}$ für die Einschränkung von f auf eine Menge $A_0 \subseteq A$. Die Fréchet-Ableitung bei einer differenzierbaren Funktion f kennzeichnen wir mittels des Differenziations-Operators D durch Df und im Fall $A \subseteq \mathbb{R}$ mit \dot{f} . Hängt eine Abbildung $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ differenzierbar von mehreren Variablen ab, so ist $D_i f$ ihre partielle Ableitung nach der i -ten Veränderlichen ($i \in \{1, 2\}$).

Sonstiges: Durch das Symbol $[x] := \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ sei die Integer-Funktion (Gauß-Klammer) $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ bezeichnet. Einer üblichen Konvention entsprechend, definieren wir „leere“ Summen gemäß

$$\sum_{n=k}^l x_n := 0$$

für $k > l$ und Elemente x_n aus einem linearen Raum. Das Ende eines Beweises wird durch das (rechtsbündige) Symbol $\#$ gekennzeichnet.

1 Ketten

Unsere Herangehensweise an einen Differenziations- und Integrations-Begriff auf abstrakten Maßketten erfolgt sukzessive in mehreren Schritten. Wir gehen axiomatisch vor und verallgemeinern zuerst die von den reellen Zahlen her bekannte Ordnungsstruktur.

Definition 1.1 (Kette): Es sei \mathbb{T} eine Menge mit mindestens zwei Elementen¹⁾ und \preceq eine Relation auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, welche

- (i) reflexiv ($t \preceq t$ für alle $t \in \mathbb{T}$),
- (ii) transitiv ($r \preceq s$ und $s \preceq t$ impliziert $r \preceq t$ für alle $r, s, t \in \mathbb{T}$),
- (iii) antisymmetrisch ($s \preceq t$ und $t \preceq s$ impliziert $s = t$ für alle $s, t \in \mathbb{T}$) und
- (iv) total ($s \preceq t$ oder $t \preceq s$ für alle $s, t \in \mathbb{T}$)

ist. Dann heißt die Relation \preceq eine lineare Ordnung auf \mathbb{T} und das Paar (\mathbb{T}, \preceq) wird als Kette bezeichnet.

Bemerkung 1.2: Ist (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette und $S \subseteq \mathbb{T}$ eine Teilmenge, so ist auch (S, \preceq) in kanonischer Weise linear geordnet. Man nennt S dann eine Teilkette von (\mathbb{T}, \preceq) .

Beispiel 1.3: (1) Für jede mehr als zwei-elementige Teilmenge $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ ist (\mathbb{T}, \leq) eine Kette. Mittels der Konvention $-\infty < t < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist auch für $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine Kette $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ erklärt.

(2) Ist X eine Menge, so definiert die Mengeninklusion \subseteq auf jeder totalen²⁾ und mehr als zwei-elementigen Teilmenge $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine lineare Ordnung, welche (\mathbb{T}, \subseteq) zur Kette macht.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei (lokal) Lipschitz-stetig und φ bezeichne die allgemeine anfangszeitunabhängige Lösung der autonomen skalaren Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Dann wird auf ihrer Lösungsmenge $\mathbb{T} := \{\varphi : J_{\max}(\xi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ durch die Relation

$$\varphi_1 \preceq \varphi_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \varphi_1(0, \xi) \leq \varphi_2(0, \xi)$$

eine lineare Ordnung erklärt.

Damit sind wir in der Lage, einige grundlegende Begriffe der Ordnungstheorie einzuführen. Zunächst ist es bequem, die Relation

$$s \prec t \quad :\Leftrightarrow \quad s \preceq t \text{ und } s \neq t, \tag{1.1}$$

sowie die Intervallschreibweise

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\tau^- &:= \{t \in \mathbb{T} : t \preceq \tau\}, & \mathbb{T}_\tau^+ &:= \{t \in \mathbb{T} : \tau \preceq t\}, \\ (r, s)_\mathbb{T} &:= \{t \in \mathbb{T} : r \prec t \prec s\}, & [r, s)_\mathbb{T} &:= \{t \in \mathbb{T} : r \preceq t \prec s\}, \\ (r, s]_\mathbb{T} &:= \{t \in \mathbb{T} : r \prec t \preceq s\}, & [r, s]_\mathbb{T} &:= \{t \in \mathbb{T} : r \preceq t \preceq s\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit $\tau, r, s \in \mathbb{T}$ auch auf beliebigen Ketten zur Verfügung zu haben. $(r, s)_\mathbb{T}$ heißt offenes, $[r, s]_\mathbb{T}$ abgeschlossenes \mathbb{T} -Intervall, wogegen man $[r, s)_\mathbb{T}$, $(r, s]_\mathbb{T}$, \mathbb{T}_τ^- und \mathbb{T}_τ^+ als halboffen bezeichnet. Dass diese Namensgebung auch topologisch sinnvoll ist, zeigt sich im nächsten Kapitel 2.

Beispiel 1.4: Wie wir durch den Index verdeutlichen, hängen die oben definierten Intervalle von der jeweiligen Kette (\mathbb{T}, \preceq) ab, was durch das Beispiel $(0, 1)_\mathbb{Z} = \emptyset$ und $(0, 1)_\mathbb{R} \neq \emptyset$ demonstriert wird. Selbst bei einer festen Kette — wie etwa (\mathbb{Z}, \leq) — können verschiedene Intervallsymbole die gleiche Menge charakterisieren: $[1, 1]_\mathbb{Z} = (0, 1]_\mathbb{Z} = [1, 2)_\mathbb{Z} = (0, 2)_\mathbb{Z} = \{1\}$.

¹⁾Die Bedeutung dieser Voraussetzung wird in den Beweisen der Sätze 4.10 und 4.32 transparent.

²⁾Im Sinne von Definition 1.1(iv).

Definition 1.5 (\mathbb{T} -Beschränktheit): Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette und $S \subseteq \mathbb{T}$ eine Teilmenge.

- (a) S heißt nach oben \mathbb{T} -beschränkt, falls es ein $t^+ \in \mathbb{T}$ gibt mit $t \preceq t^+$ für alle $t \in S$ und t^+ wird dann als obere \mathbb{T} -Schranke von S bezeichnet,
- (b) S heißt nach unten \mathbb{T} -beschränkt, falls es ein $t^- \in \mathbb{T}$ gibt mit $t^- \preceq t$ für alle $t \in S$ und t^- wird dann als untere \mathbb{T} -Schranke von S bezeichnet,
- (c) schließlich heißt S \mathbb{T} -beschränkt, wenn S nach oben und nach unten \mathbb{T} -beschränkt ist.

Ferner bezeichnen $-\infty$ und ∞ die universellen adjungierten unteren und oberen Schranken der Menge \mathbb{T} außerhalb von \mathbb{T} : $-\infty \prec t \prec \infty$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Definition 1.6 (\mathbb{T} -Supremum, \mathbb{T} -Infimum, \mathbb{T} -Maximum, \mathbb{T} -Minimum): Gegeben seien eine Kette (\mathbb{T}, \preceq) und eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$.

- (a) Ein $\alpha^+ \in \mathbb{T}$ heißt \mathbb{T} -Supremum von S , falls α^+ die kleinste obere \mathbb{T} -Schranke von S ist, d.h. falls α^+ eine obere \mathbb{T} -Schranke ist und jedes $\beta \in \mathbb{T}$ mit $\beta \prec \alpha^+$ keine obere \mathbb{T} -Schranke von S ist; wir schreiben dann $\sup_{\mathbb{T}} S := \alpha^+$,
- (b) ein $\alpha^- \in \mathbb{T}$ heißt \mathbb{T} -Infimum von S , falls α^- die größte untere \mathbb{T} -Schranke von S ist, d.h. falls α^- eine untere \mathbb{T} -Schranke ist und jedes $\beta \in \mathbb{T}$ mit $\alpha^- \prec \beta$ keine untere \mathbb{T} -Schranke von S ist. Wir schreiben dann $\inf_{\mathbb{T}} S := \alpha^-$,
- (c) im Fall $\sup_{\mathbb{T}} S \in S$ bzw. $\inf_{\mathbb{T}} S \in S$ sprechen wir von einem \mathbb{T} -Maximum $\max_{\mathbb{T}} S$ bzw. von einem \mathbb{T} -Minimum $\min_{\mathbb{T}} S$ der Menge S .

Jede Teilmenge einer Kette (\mathbb{T}, \preceq) hat offenbar höchstens ein \mathbb{T} -Supremum und höchstens ein \mathbb{T} -Infimum.

Bemerkung 1.7: (1) Per definitionem müssen $\sup_{\mathbb{T}} S$ und $\inf_{\mathbb{T}} S$ im Falle ihrer Existenz zu \mathbb{T} , aber nicht notwendigerweise zur Menge S gehören.

(2) Da auch das Paar (\mathbb{R}, \leq) eine Kette ist, haben wir mit den beiden obigen Definitionen die Bezeichnungen \mathbb{R} -Schranke, \mathbb{R} -Supremum und \mathbb{R} -Infimum eingeführt, welche mit den bekannten Begriffen aus der reellen Analysis übereinstimmen. Offensichtlich ist für eine vorgegebene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ mit $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ jede obere \mathbb{T} -Schranke auch eine obere \mathbb{R} -Schranke, wogegen nicht jede obere \mathbb{R} -Schranke eine obere \mathbb{T} -Schranke ist.

2 Die Ordnungstopologie

Wir demonstrieren nun, dass eine lineare Ordnung auf einer Menge eine Topologie induziert.

Satz 2.1 (Ordnungstopologie): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette und $\mathcal{B}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{T})$ die Familie aller \mathbb{T} -Intervalle der Form $(a, b)_{\mathbb{T}}$, $[\min_{\mathbb{T}} \mathbb{T}, b)_{\mathbb{T}}$ (falls \mathbb{T} nach unten \mathbb{T} -beschränkt ist) oder $(a, \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}]_{\mathbb{T}}$ (insofern \mathbb{T} nach oben \mathbb{T} -beschränkt ist) für $a, b \in \mathbb{T}$. Dann ist $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ eine Basis genau einer Topologie auf \mathbb{T} , der sog. Ordnungstopologie. Deren Elemente sind beliebige Vereinigungen der Intervalle aus $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$.*

Beweis: Zunächst liegt jedes $t \in \mathbb{T}$ in wenigstens einem Element von $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$: Das \mathbb{T} -Minimum von \mathbb{T} (falls existent) in $[\min_{\mathbb{T}} \mathbb{T}, b)_{\mathbb{T}}$, das \mathbb{T} -Maximum (falls existent) in $(a, \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}]_{\mathbb{T}}$ und jedes andere $t \in \mathbb{T}$ in $(a, b)_{\mathbb{T}}$. Ferner ist der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ entweder leer oder wieder in $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$, wie man einfach verifiziert. Nach LANG [35, p. 23] ist $\mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ dann eine Basis genau einer Topologie auf \mathbb{T} . #

Korollar 2.2: *Auch die Mengen der Form*

$$(a, \infty)_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : a \prec t\}, \quad (-\infty, b)_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : t \prec b\} \quad (2.1)$$

sind für alle $a, b \in \mathbb{T}$ offen.

Beweis: Existiert das \mathbb{T} -Maximum von \mathbb{T} , so gilt $(a, \infty)_{\mathbb{T}} = (a, \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}]_{\mathbb{T}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ und andernfalls ist

$$(a, \infty)_{\mathbb{T}} = \bigcup_{a \prec t} (a, t)_{\mathbb{T}},$$

somit also offen. Analog schließt man für $(-\infty, b)_{\mathbb{T}}$. #

Bemerkung 2.3: (1) Die Mengen aus Korollar 2.2 bilden eine Subbasis der Ordnungstopologie.

(2) Kaum relevant, aber erwähnenswert erscheint es, dass jede geordnete Menge \mathbb{T} als Ordnungstopologie die indiskrete Topologie, mit den einzigen offenen Mengen \emptyset und \mathbb{T} , besitzen kann. Sie wird von der linearen Ordnung $x \preceq y \Leftrightarrow x = y$ erzeugt.

Damit stehen uns mit einem Schlag sämtliche topologischen Begriffe, wie Umgebungen, Abgeschlossenheit, Zusammenhang zur Verfügung. Ebenso lässt sich die Stetigkeit von Abbildungen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ in einen topologischen Raum \mathcal{X} erklären. Von nun an seien Ketten stets mit der Ordnungstopologie versehen.

Ohne detailliertere Begründung geben wir noch einige Eigenschaften der Ordnungstopologie an:

Satz 2.4 (Separiertheit der Ordnungstopologie): *Die Ordnungstopologie auf einer Kette (\mathbb{T}, \preceq) ist normal¹⁾ und damit insbesondere regulär²⁾ und Hausdorff'sch.*

Beweis: Siehe FÜHRER [18, pp. 76–77, 9.20 Beispiel]. #

Bemerkung 2.5: Wie in FÜHRER [18, p. 141, A3] demonstriert, kann man sogar zeigen, dass \mathbb{T} in der Ordnungstopologie ein T_5 -Raum ist, d.h. er ist T_1 und sämtliche Unterräume sind normal.

Beispiel 2.6: (1) Die Ordnungstopologie auf (\mathbb{R}, \leq) ist die übliche Topologie auf \mathbb{R} .

(2) Die Ordnungstopologie auf der Teilkette $h\mathbb{Z}$ ($h > 0$) von (\mathbb{R}, \leq) ist die diskrete Topologie; jede einpunktige Menge ist offen, denn es gilt $\{t\} = (t - h, h + h)_{h\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}_{h\mathbb{Z}}$. Gleiches gilt auch für deren Teilkette $h\mathbb{N}$, wenn man für das minimale Element h beachtet, dass $\{h\} = [h, 2h)_{h\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_{h\mathbb{N}}$ gilt.

(3) In der Teilkette $\mathbb{T} := [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von (\mathbb{R}, \leq) sind folgende Mengen \mathbb{T} -offen bzw. \mathbb{T} -abgeschlossen:

¹⁾Ein topologischer Raum heißt normal, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen stets disjunkte Umgebungen gibt.

²⁾Ein topologischer Raum \mathcal{P} heißt regulär, wenn jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathcal{P}$ und jeder Punkt $x \in \mathcal{P} \setminus A$ disjunkte Umgebungen besitzen.

\mathbb{T} -offen	\mathbb{T} -abgeschlossen
$\{t\}$ für $t > 0$	$\mathbb{T} \setminus \{t\}$ für $t > 0$
$\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$	$[-1, 0]_{\mathbb{T}}$
$[-1, t]_{\mathbb{T}}$ für $t > 0$	$(t, 1]_{\mathbb{T}}$ für $t > 0$
$\mathbb{T} \setminus \{t\}$ für $t \in \mathbb{T}$	$\{t\}$ für $t \in \mathbb{T}$

Nicht \mathbb{T} -offen sind dagegen die einpunktigen Mengen $\{t\}$ im Fall $t \leq 0$ und folglich ist dann $\mathbb{T} \setminus \{t\}$ auch nicht \mathbb{T} -abgeschlossen.

Die von \mathbb{R} induzierte Spurtopologie stimmt im Allgemeinen nicht mit der Ordnungstopologie auf einer Teilkette überein.

Beispiel 2.7: Wir betrachten die Teilkette $S := [0, 1)_{\mathbb{T}} \cup \{2\}$ von (\mathbb{R}, \leq) . In der Spurtopologie von \mathbb{R} ist die einpunktige Menge $\{2\}$ offen, da sie der Schnitt der offenen Menge $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})_{\mathbb{R}}$ mit S ist. Aber in der Ordnungstopologie auf S ist $\{2\}$ nicht offen: Jedes die Zahl 2 enthaltende Basiselement der Ordnungstopologie ist von der Form $[s, 2)_S$ für ein $s \in S$ und enthält somit stets mehr als einen Punkt.

Lemma 2.8: *Ist die Teilkette S von (\mathbb{T}, \preceq) ein \mathbb{T} -Intervall oder von der Form (2.1), so stimmen die von \mathbb{T} induzierte Spurtopologie und die Ordnungstopologie auf S überein.*

Beweis: Siehe MUNKRES [36, p. 90, Theorem 5.3]. #

Weitere Aussagen über die Beziehung zwischen Spur- und Ordnungstopologie liefert der Satz 4.4. Wir präsentieren noch ein Beispiel kompakter Mengen in \mathbb{T} .

Satz 2.9: *Die abgeschlossenen Intervalle $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{T}$) sind kompakt in der Ordnungstopologie.*

Beweis: Wir nehmen an, das Intervall $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ sei nicht kompakt. Dann existiert wegen der logischen Negation der Heine-Borel-Eigenschaft (vergleiche LANG [35, p. 31, Proposition 3.1]) eine Familie $\{[s_i^-, s_i^+]_{\mathbb{T}}\}_{i \in I}$ nichtleerer abgeschlossener Intervalle aus $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ mit

$$\bigcap_{i \in I} [s_i^-, s_i^+]_{\mathbb{T}} = \emptyset, \quad \bigcap_{j \in J} [s_j^-, s_j^+]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$$

für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ der Indexmenge I . Insbesondere gilt für beliebige $i_1, i_2 \in I$

$$[\max\{s_{i_1}^-, s_{i_2}^-\}, \min\{s_{i_1}^+, s_{i_2}^+\}]_{\mathbb{T}} = [s_{i_1}^-, s_{i_1}^+]_{\mathbb{T}} \cap [s_{i_2}^-, s_{i_2}^+]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset.$$

Daraus folgt $\max\{s_{i_1}^-, s_{i_2}^-\} \preceq \min\{s_{i_1}^+, s_{i_2}^+\}$, also auch $s_{i_1}^- \preceq s_{i_2}^+$. Dies zieht aber $\sup_{i \in I} s_i^- \preceq \inf_{i \in I} s_i^+$ nach sich und es resultiert

$$\emptyset \neq \left[\sup_{i \in I} s_i^-, \inf_{i \in I} s_i^+ \right]_{\mathbb{T}} \subseteq \bigcap_{i \in I} [s_i^-, s_i^+]_{\mathbb{T}} = \emptyset.$$

Das ist ein Widerspruch. #

3 Sprungoperatoren

Wegen folgendem Beispiel verhalten sich Ketten (\mathbb{T}, \preceq) im Hinblick auf den Zusammenhang uneinheitlich.

Beispiel 3.1: In der mittlerweile bekannten Menge $\mathbb{T} := [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ aus dem obigen Beispiel 2.6(3) wurde festgestellt, dass die einpunktige Menge $\{1\}$ \mathbb{T} -offen und \mathbb{T} -abgeschlossen ist. Demzufolge lässt sich \mathbb{T} als Vereinigung zweier disjunkter nichtleerer \mathbb{T} -offener Mengen $\mathbb{T} = \{1\} \dot{\cup} (\mathbb{T} \setminus \{1\})$ schreiben und ist damit unzusammenhängend. Auf der anderen Seite ist etwa (\mathbb{R}, \leq) zusammenhängend.

Diese topologische Mangelerscheinung behebt man durch die Einführung sog. Sprungoperatoren.

Definition 3.2 (Sprungoperatoren): Für jede Kette (\mathbb{T}, \preceq) definieren wir durch

$$\rho^+(t) := \begin{cases} \inf_{\mathbb{T}} \{s \in \mathbb{T} : t \prec s\} & \text{für } \{s \in \mathbb{T} : t \prec s\} \neq \emptyset \\ \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T} & \text{für } \{s \in \mathbb{T} : t \prec s\} = \emptyset \end{cases},$$

$$\rho^-(t) := \begin{cases} \sup_{\mathbb{T}} \{s \in \mathbb{T} : s \prec t\} & \text{für } \{s \in \mathbb{T} : s \prec t\} \neq \emptyset \\ \min_{\mathbb{T}} \mathbb{T} & \text{für } \{s \in \mathbb{T} : s \prec t\} = \emptyset \end{cases}$$

den Sprungoperator $\rho^+ : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ und den Rücksprungoperator $\rho^- : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$.

Bemerkung 3.3: (1) Diese Operatoren sind wohldefiniert, obwohl bislang nicht gefordert wird, dass (\mathbb{T}, \preceq) „vollständig“ ist. Ferner haben sie für beliebiges $t \in \mathbb{T}$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} t \preceq \rho^+(t), & & \rho^-(t) \preceq t, \\ \rho^+(\mathbb{T} \setminus \{\max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}\}) \subseteq \mathbb{T}, & & \rho^-(\mathbb{T} \setminus \{\min_{\mathbb{T}} \mathbb{T}\}) \subseteq \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

(2) Dem Fall $\{s \in \mathbb{T} : t \prec s\} = \emptyset$ entspricht genau die Situation, dass \mathbb{T} nach oben \mathbb{T} -beschränkt mit $t = \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}$ ist. Entsprechendes gilt für das \mathbb{T} -Minimum beim Rücksprungoperator ρ^- .

Beispiel 3.4: (1) Dass in den Beziehungen (3.1) sowohl Gleichheit, als auch eine echte Mengeninklusion bestehen kann, zeigen die folgenden Teilketten $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ von (\mathbb{R}, \leq) mit

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_1 &:= \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, & \max_{\mathbb{T}_1} \mathbb{T}_1 &= 1, & \rho^+\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 2, \\ \mathbb{T}_2 &:= \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}, & \min_{\mathbb{T}_2} \mathbb{T}_2 &= 0, & \rho^-\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und folglich

$$\rho^+(\mathbb{T}_1 \setminus \{1\}) = \mathbb{T}_1, \quad \rho^-(\mathbb{T}_2 \setminus \{0\}) = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}_2.$$

(2) Für die Teilkette $\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}$ ($\sigma \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$) der Kette (\mathbb{R}, \leq) lauten die Bilder der Sprungoperatoren

$$\rho^+(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}, \quad \rho^-(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z} + (0, \sigma]_{\mathbb{R}},$$

sie sind also nicht surjektiv.

Diese beiden Operatoren erlauben es uns, die Punkte aus \mathbb{T} bezüglich ihrer links- und rechtsseitigen Umgebung zu klassifizieren:

Definition 3.5 (dichte und zerstreute Punkte): Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Ein Punkt $t \in \mathbb{T}$ heißt

$$\begin{aligned} \text{rechts-dicht} & \quad \Leftrightarrow \quad \rho^+(t) = t, & \text{rechts-zerstreut} & \quad \Leftrightarrow \quad t \prec \rho^+(t), \\ \text{links-dicht} & \quad \Leftrightarrow \quad \rho^-(t) = t, & \text{links-zerstreut} & \quad \Leftrightarrow \quad \rho^-(t) \prec t. \end{aligned}$$

Mit $RD(\mathbb{T})$, $RS(\mathbb{T})$, $LD(\mathbb{T})$ und $LS(\mathbb{T})$ bezeichnen wir die Menge aller rechts-dichten, rechts-zerstreuten, links-dichten und links-zerstreuten Punkte aus \mathbb{T} .

Bemerkung 3.6: Offenbar sind die Mengen $RD(\mathbb{T})$ und $RS(\mathbb{T})$ bzw. $LD(\mathbb{T})$ und $LS(\mathbb{T})$ disjunkt; sie bilden aber im Allgemeinen keine Partition von \mathbb{T} , wie das folgende Beispiel 3.7(3) demonstriert.

Beispiel 3.7: (1) Im Fall der Kette (\mathbb{R}, \leq) gilt $\rho^-(t) \equiv \rho^+(t) \equiv t$ auf \mathbb{R} und jede reelle Zahl ist rechts- und links-dicht. Wir erhalten also $RD(\mathbb{R}) = LD(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $RS(\mathbb{R}) = LS(\mathbb{R}) = \emptyset$.

(2) Bei der Kette $(h\mathbb{Z}, \leq)$ ($h > 0$) ist $\rho^+(t) = t + h > h$ und $\rho^-(t) = t - h < t$, also ist jeder Punkt rechts- und links-zerstreut. Hier ist $RS(h\mathbb{Z}) = LS(h\mathbb{Z}) = h\mathbb{Z}$ und $RD(h\mathbb{Z}) = LD(h\mathbb{Z}) = \emptyset$.

(3) Ordnet man $\mathbb{T} := [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup [2, 3]_{\mathbb{R}} \cup \{4\}$ wie \mathbb{R} , so erhält man die Punkttypen:

$$\begin{aligned} \text{rechts-dicht und links-dicht} & : t \in [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup (2, 3)_{\mathbb{R}}, \\ \text{rechts-dicht und links-zerstreut} & : t = 2, \\ \text{rechts-zerstreut und links-dicht} & : t = 3, \\ \text{rechts-zerstreut und links-zerstreut} & : t \in \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

(4) Bei der Menge $\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}$ ($\sigma \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$) aus Beispiel 3.4(2) erhält man

$$\begin{aligned} RD(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) &= \mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}, & LD(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) &= \mathbb{Z} + (0, \sigma]_{\mathbb{R}}, \\ RS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) &= \begin{cases} \mathbb{Z} + \{\sigma\} & \text{für } \sigma \in [0, 1)_{\mathbb{R}} \\ \emptyset & \text{für } \sigma = 1 \end{cases}, & LS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } \sigma \in [0, 1)_{\mathbb{R}} \\ \emptyset & \text{für } \sigma = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Eine notwendige und hinreichende Beschreibung der zerstreuten Punkte liefert das folgende Resultat:

Satz 3.8 (Charakterisierung zerstreuter Punkte): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Dann gilt:*

- (a) *Der Punkt $t \in \mathbb{T}$ ist genau dann rechts- (bzw. links-) zerstreut, wenn es ein $s \in (t, \infty)_{\mathbb{T}}$ (bzw. $s \in (-\infty, t)_{\mathbb{T}}$) gibt mit $(t, s)_{\mathbb{T}} = \emptyset$ (bzw. $(t, s)_{\mathbb{T}} = \emptyset$),*
- (b) *ist $t \in \mathbb{T}$ rechts- (bzw. links-) zerstreut, so ist das nach (a) existierende $s \in \mathbb{T}$ eindeutig bestimmt, und zwar gilt $s = \rho^+(t)$ (bzw. $s = \rho^-(t)$),*
- (c) *ist $t \in \mathbb{T}$ rechts- (bzw. links-) zerstreut, so ist $\rho^+(t)$ links-zerstreut (bzw. $\rho^-(t)$ rechts-zerstreut) und es gilt $\rho^-(\rho^+(t)) = t$ (bzw. $\rho^+(\rho^-(t)) = t$).*

Beweis: O.B.d.A. betrachten wir nur einen der beiden beschriebenen Fälle.

(a) (\Rightarrow) Es sei $t \prec \rho^+(t)$. Für $s := \rho^+(t)$ gilt dann $(t, s)_{\mathbb{T}} = \emptyset$, denn ein $r \in (t, s)_{\mathbb{T}}$ würde der Definition des Sprungoperators ρ^+ widersprechen.

(\Leftarrow) Es sei $s \in \mathbb{T}$ mit $t \prec s$ und $(t, s)_{\mathbb{T}} = \emptyset$. Dann gilt nach der Definition von ρ^+ die Beziehung $\rho^+(t) = s$ und damit $t \prec \rho^+(t)$.

(b) Die Annahme $s \prec \rho^+(t)$ widerspricht der Definition von ρ^+ und die Annahme $\rho^+(t) \prec s$ liefert einen Widerspruch zur Beziehung $(t, s)_{\mathbb{T}} = \emptyset$.

(c) Mit dem bislang Bewiesenen folgt die Implikationskette:

$$t \in RS(\mathbb{T}) \stackrel{(b)}{\Rightarrow} (t, \rho^+(t))_{\mathbb{T}} = \emptyset \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \rho^+(t) \in RS(\mathbb{T}) \text{ und } \rho^-(\rho^+(t)) = t.$$

Damit ist alles gezeigt. #

Beispiel 3.9: Wir untersuchen wieder $\mathbb{T} := [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup [2, 3]_{\mathbb{R}} \cup \{4\}$. Die rechts-zerstreuten Punkte sind 3, 1 und $\frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die nach Satz 3.8 eindeutig bestimmten jeweiligen „rechten Nachbarn“ lauten 4, 2 und $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die links-zerstreuten Punkte sind 4, 2 und $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit ihren jeweiligen „linken Nachbarn“ 3, 1 und $\frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir beschreiben nun die dichten Punkte.

Satz 3.10 (Charakterisierung dichter Punkte): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Dann gilt:*

- (a) *Der Punkt $t \in \mathbb{T}$ ist genau dann rechts- (bzw. links-) dicht, wenn für jedes $s \in (t, \infty)_{\mathbb{T}}$ (bzw. jedes $s \in (-\infty, t)_{\mathbb{T}}$) die Beziehung $(t, s)_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$ (bzw. $(s, t)_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$) gilt,*
- (b) *ist $t \in \mathbb{T}$ rechts-dicht und nicht \mathbb{T} -maximal (bzw. links-dicht und nicht \mathbb{T} -minimal), so existiert zu jeder Umgebung U von t ein $s \in U$ mit $t \prec s$ (bzw. $s \prec t$) und $[t, s]_{\mathbb{T}} \subseteq U$ (bzw. $[s, t]_{\mathbb{T}} \subseteq U$).*

Bemerkung 3.11: Man beachte, dass sich das eventuell vorhandene Extremum von \mathbb{T} in die Aussage (a) des Satzes einordnet.

Beweis: Die Aussage (a) ist das logische Gegenteil der Aussage (a) des Satzes 3.8 und bedarf daher keines Beweises. Bei (b) genügt es wieder, sich auf rechts-dichte Punkte zu beschränken.

Es sei $U \subseteq \mathbb{T}$ eine beliebige Umgebung von $t \in \mathbb{T}$. Dann existieren $r, s \in \mathbb{T}$ mit $(r, s)_{\mathbb{T}} \subseteq U$. Es gibt dann ein $\tilde{t} \in (r, s)_{\mathbb{T}}$ mit $t \prec \tilde{t}$ und wegen Teil (a) gilt $(t, \tilde{t})_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$. Also gilt die Inklusion $[t, \tilde{t}]_{\mathbb{T}} \subseteq (r, s)_{\mathbb{T}} \subseteq U$. #

Beispiel 3.12: Für $\mathbb{T} := [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup [2, 3]_{\mathbb{R}} \cup \{4\}$ ist

$$RD(\mathbb{T}) = [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup [2, 3]_{\mathbb{R}} \cup \{4\}, \quad LD(\mathbb{T}) = [-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup (2, 3]_{\mathbb{R}}.$$

Schließlich kommen wir noch zu einer topologischen Eigenschaft von Ketten:

Satz 3.13 (Umgebungsbasen in Ketten): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Jedes $t \in \mathbb{T}$ besitzt dann eine Umgebungsbasis aus kompakten Intervallumgebungen. Also ist jedes Intervall von \mathbb{T} lokal-kompakt.*

Beweis: Jede Umgebung von $t \in \mathbb{T}$ enthält eine t enthaltende offene Menge, die wiederum ein t enthaltendes offenes Intervall $(t_1, t_2)_{\mathbb{T}}$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ umfasst.

1. Fall: $t \in LS(\mathbb{T})$ oder minimal. Setze $t^- := t$.

2. Fall: $t \in RS(\mathbb{T})$ oder maximal. Setze $t^+ := t$.

3. Fall: $t \in LD(\mathbb{T})$ und nicht minimal. Dann existiert ein $s \in (t_1, t_2)_{\mathbb{T}}$ mit $s \prec t$; setze $t^- := s$.

4. Fall: $t \in RD(\mathbb{T})$ und nicht maximal. Dann existiert ein $s \in (t_1, t_2)_{\mathbb{T}}$ mit $t \prec s$; setze $t^+ := s$.

In jedem Fall gilt dann $t \in [t^-, t^+]_{\mathbb{T}} \subseteq (t_1, t_2)_{\mathbb{T}}$ und $[t^-, t^+]_{\mathbb{T}}$ ist eine Umgebung von t . #

4 Maßketten

Für weitere Untersuchungen ist es erforderlich, von Ketten eine gewisse „Vollständigkeit“ zu verlangen.

Definition 4.1 (bedingt-vollständige Ketten): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Wir bezeichnen (\mathbb{T}, \preceq) dann als bedingt-vollständig, wenn jede nichtleere und nach oben \mathbb{T} -beschränkte Teilmenge von \mathbb{T} ein \mathbb{T} -Supremum besitzt.*

Beispiel 4.2: (1) Bezüglich der natürlichen Ordnung \leq sind die \mathbb{R} -abgeschlossenen Mengen \mathbb{R} und $h\mathbb{Z}$ bedingt-vollständig, \mathbb{Q} oder $\{x \in [0, 1]_{\mathbb{R}} : x \notin \mathbb{Q}\}$ dagegen nicht.

(2) In der Kette (\mathbb{R}, \leq) ist die Teilmenge $S := (-\infty, 0)_{\mathbb{R}} \cup (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ nicht bedingt-vollständig, denn $(-\infty, 0)_{\mathbb{R}}$ besitzt kein Supremum und $(1, \infty)_{\mathbb{R}}$ kein Infimum in S . Die Situation abgeschlossener oder halb-offener Lücken in der Kette — wie etwa bei $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}} \cup (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ oder $(-\infty, 0]_{\mathbb{R}} \cup [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ — stellt dagegen keinen Widerspruch zur bedingten Vollständigkeit dar.

Es liegt relativ nahe, eine notwendige Bedingung dafür anzugeben, dass eine Kette bedingt-vollständig ist. Wie das Beispiel $h\mathbb{Z}$ zeigt, ist sie aber nicht hinreichend.

Lemma 4.3: *Jede (bezüglich der Ordnungstopologie) zusammenhängende Kette (\mathbb{T}, \preceq) ist bedingt-vollständig.*

Beweis: Siehe FÜHRER [18, p. 84, 10.3 b) Bemerkungen und Beispiele]. #

Der fundamentale Charakter bedingt-vollständiger Ketten kommt in den folgenden Sätzen zum Ausdruck. Sie demonstrieren, dass die Übertragung wichtiger Eigenschaften der reellen Zahlen auf andere „Zeitskalen“, insbesondere auf $h\mathbb{Z}$, bei topologischer Interpretation nur schwer, bei ordnungstheoretischer Betrachtung dagegen verhältnismäßig unproblematisch vollzogen werden kann.

Zunächst untersuchen wir, wie sich ordnungstopologische Eigenschaften einer Kette auf Teilmengen vererben:

Satz 4.4 (Eigenschaften der Spurtopologie): *Für die Teilmenge S der Kette (\mathbb{T}, \preceq) seien folgende Aussagen gegeben:*

- (a) S ist \mathbb{T} -abgeschlossen,
- (b) (S, \preceq) ist bedingt-vollständig,
- (c) die Ordnungstopologie auf S ist feiner als die von \mathbb{T} induzierte Spurtopologie,
- (d) die Ordnungstopologie auf S stimmt mit der Relativtopologie überein.

Dann gilt die Implikationskette $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$.

Beispiel 4.5: $(0, 1)_{\mathbb{R}}$ ist bedingt-vollständig in (\mathbb{R}, \leq) , aber nicht abgeschlossen. Damit ist die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ nicht umkehrbar. Ferner erfüllt $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Aussagen (c) und (d), aber nicht (b).

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$ Es sei $U \subseteq S$ nichtleer und \mathbb{T} -beschränkt nach oben. Dann existiert das Supremum $\alpha^+ := \sup_{\mathbb{T}} U \in \mathbb{T}$. Nehmen wir an, es gilt $\alpha^+ \notin S$, so existiert eine offene Intervallumgebung $(t_1, t_2)_{\mathbb{T}}$ von α^+ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ und $\alpha^+ \in (t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{T} \setminus S$, weil $\mathbb{T} \setminus S$ offen ist. Wegen $U \subseteq S$ gilt dann $(t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \cap U = \emptyset$. Andererseits ist $t_1 < \alpha^+ < t_2$ und damit ist α^+ nicht kleinste obere Schranke.

(b) \Rightarrow (c) Die Mengen der Form $(t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \cap S$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{T} \cup \{-\infty, \infty\}$ bilden ein Basissystem der Relativtopologie von S . Wir zeigen nun, dass sie S -offen sind. Für beliebige $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ gilt mit

$$\alpha^+ := \sup \{s \in S : s \preceq t_1\}, \quad \alpha^- := \inf \{s \in S : t_2 \preceq s\}$$

nämlich $(\alpha^+, \alpha^-)_{\mathbb{T}} \cap S = (t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \cap S$, wobei die linke Menge S -offen ist. Sofort aus der Definition folgt $\alpha^+ \preceq t_1$ und $t_2 \preceq \alpha^-$, also $(\alpha^+, \alpha^-)_{\mathbb{T}} \cap S \subseteq (t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \cap S$. Nimmt man nun umgekehrt für beliebiges $s \in (\alpha^+, \alpha^-)_{\mathbb{T}} \cap S$ an, dass $s \preceq t_1$ ist, so resultiert $s \in \{t \in S : t \preceq t_1\}$ und weiter der Widerspruch $s \preceq \alpha^+$. Es gilt also $t_1 \prec s$ und mit einer dualen Überlegung $s \prec t_2$. Dann folgt $s \in (\alpha^+, \alpha^-)_{\mathbb{T}} \cap S$ und wir erhalten $(\alpha^+, \alpha^-)_{\mathbb{T}} \cap S \subseteq (t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \cap S$.

(c) \Rightarrow (d) Ein S -offenes Intervall hat die Form $(s_1, s_2)_{\mathbb{T}} \cap S$ für $s_1, s_2 \in S$ und ist damit relativ-offen. #

Wir verzichten vorläufig auf den Beweis der folgenden beiden Sätze 4.6 und 4.8, da sie sich später aus einem allgemeineren Resultat in Satz 4.10 ergeben werden.

Satz 4.6 (Induktionsprinzip): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine bedingt-vollständige Kette, $\tau := \min_{\mathbb{T}} \mathbb{T}$ fixiert und $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{T}_\tau^+}$ eine Familie von Aussagen, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $\mathcal{A}(\tau)$ ist wahr,
- (ii) für jedes $t \in RS(\mathbb{T}_\tau^+)$ gilt $\mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(\rho^+(t))$,
- (iii) zu jedem $t \in RD(\mathbb{T}_\tau^+)$ existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{T}$ mit $\mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(s)$ für alle $s \in U$ mit $t \preceq s$,
- (iv) für jedes $t \in LD(\mathbb{T}_\tau^+)$ gilt die Implikation: $\langle \forall s \in [\tau, t)_{\mathbb{T}} : \mathcal{A}(s) \text{ ist wahr} \rangle \Rightarrow \mathcal{A}(t) \text{ ist wahr}$.

Dann ist $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}_\tau^+$ eine wahre Aussage.

Bemerkung 4.7: (1) Für $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_\tau^+$ sind die Bedingungen (iii) und (iv) des Induktionsprinzips wegen $LD(\mathbb{T}) = RD(\mathbb{T}) = \emptyset$ trivialerweise erfüllt. Es reduziert sich in diesem Fall auf das Prinzip der vollständigen Induktion für die natürlichen Zahlen.

(2) Ist \mathbb{T} ein links abgeschlossenes reelles Intervall, so ist die Bedingung (ii) redundant. Das Induktionsprinzip beinhaltet dann das (topologische) Beweisprinzip, dass eine nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ schon mit I übereinstimmen muss. Diese kontinuierliche Variante eines „Induktionsprinzips“ benutzt DIEUDONNÉ [12, p. 152, Satz 8.5.1] zum Beweis grundlegender Sätze der Differenzial- und Integralrechnung. Die dortige Darstellung gibt daher eine gute Orientierungshilfe zur Entwicklung des Maßkettenkalküls ab.

(3) Um Aussagen $\mathcal{A}(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}_\tau^-$ nachzuweisen, kann man eine duale Variante von Satz 4.6 einsetzen. Wir formulieren dieses duale Induktionsprinzip hier ohne Beweis: Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine bedingt-vollständige Kette und $\tau := \max_{\mathbb{T}} \mathbb{T}$ fixiert. Dann ist $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}_\tau^-$ wahr, falls für die Familie von Aussagen $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{T}_\tau^-}$ gilt:

- (i) $\mathcal{A}(\tau)$ ist wahr,
- (ii) für jedes $t \in LS(\mathbb{T}_\tau^-)$ gilt $\mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(\rho^-(t))$,
- (iii) zu jedem $t \in LD(\mathbb{T}_\tau^-)$ existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{T}$ mit $\mathcal{A}(t) \Rightarrow \mathcal{A}(s)$ für alle $s \in U$ mit $s \preceq t$,
- (iv) für jedes $t \in RD(\mathbb{T}_\tau^-)$ gilt die Implikation: $\langle \forall s \in (t, \tau]_{\mathbb{T}} : \mathcal{A}(s) \text{ ist wahr} \rangle \Rightarrow \mathcal{A}(t) \text{ ist wahr}$.

Satz 4.8 (Zwischenwertsatz): *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine bedingt-vollständige Kette. Sind $r, s \in \mathbb{T}$, $r \prec s$ und ist $f : [r, s]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(r) \leq 0 \leq f(s)$, so besitzt f einen Knoten in $[r, s]_{\mathbb{T}}$, d.h. es gibt einen Punkt $t \in [r, s]_{\mathbb{T}}$ mit*

$$\boxed{f(t)f(\rho^+(t)) \leq 0.} \quad (4.1)$$

Beispiel 4.9: Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Z} + [0, \sigma]$ ($\sigma \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$) (vergleiche Beispiel 3.4(2)) der Kette (\mathbb{R}, \leq) und die stetige Funktion $f : [-1, 1]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := t + \frac{1-\sigma}{2}$. Wie man sich leicht verdeutlicht, ist der Knoten aus dem Zwischenwertsatz bei der vorliegenden Abbildung eindeutig bestimmt und durch $t = \sigma - 1$ gegeben; es gilt $f(\sigma - 1)f(\rho^+(\sigma - 1)) = f(\sigma - 1)f(0) = -\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)^2$. Für $\sigma = 1$ erhält man somit die Nullstelle $t = 0$ von f und andernfalls besteht in Beziehung (4.1) eine echte Ungleichung.

Wie angekündigt präsentieren wir nun ein Resultat, welches die Äquivalenz von Induktionsprinzip und Zwischenwertsatz beinhaltet.

Satz 4.10: *Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine Kette. Dann sind die folgenden Eigenschaften von (\mathbb{T}, \preceq) äquivalent:*

- (a) (\mathbb{T}, \preceq) ist bedingt-vollständig,
- (b) jede nichtleere, nach unten \mathbb{T} -beschränkte Teilmenge von \mathbb{T} besitzt ein \mathbb{T} -Infimum,
- (c) es gilt das Induktionsprinzip aus Satz 4.6.
- (d) eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ ist genau dann \mathbb{T} -kompakt, wenn sie \mathbb{T} -beschränkt und \mathbb{T} -abgeschlossen ist,
- (e) es gilt der Zwischenwertsatz 4.8.

Beweis: Wir gehen in einem Ringschluss vor:

(a) \Rightarrow (b): Die Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ sei nach unten \mathbb{T} -beschränkt. Man wähle nun als untere Schranke $\inf_{\mathbb{T}} S := \sup_{\mathbb{T}} \{t \in \mathbb{T} : t \prec s \text{ für alle } s \in S\}$.

(b) \Rightarrow (c): Angenommen, es existiert ein $t \in \mathbb{T}_{\tau}^+$, so dass $\mathcal{A}(t)$ nicht erfüllt ist. Dann definieren wir

$$t^* := \inf_{\mathbb{T}} \{t \in \mathbb{T}_{\tau}^+ : \mathcal{A}(t) \text{ gilt nicht}\}. \quad (4.2)$$

(I) Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{A}(t^*)$ wahr ist:

Fall 1: t^* ist minimal. Dann ist $t^* = \tau$ und mit (i) aus Satz 4.6 folgt die Behauptung.

Fall 2: $t^* \in LS(\mathbb{T})$, d.h. $\rho^-(t^*) \prec t^*$. Es gilt nach Definition von t^* sofort $\mathcal{A}(\rho^-(t^*))$, woraus mit (ii) auch $\mathcal{A}(t^*) = \mathcal{A}(\rho^+(\rho^-(t^*)))$ folgt.

Fall 3: $t^* \in LD(\mathbb{T})$. Die Behauptung folgt mit (iv).

(II) Nachdem nun $\mathcal{A}(t^*)$ als wahr nachgewiesen ist, erzielen wir mittels einer Fallunterscheidung auch $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t \in [\tau, t^*]_{\mathbb{T}}$, denn:

Fall 1: t^* ist maximal. Mit (I) gilt $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t \in [\tau, t^*]_{\mathbb{T}}$.

Fall 2: $t^* \in RS(\mathbb{T})$. Aus $\mathcal{A}(t^*)$ folgt mit (ii) auch $\mathcal{A}(\rho^+(t^*))$ und dann $t^* \prec \rho^+(t^*) \preceq t^*$.

Fall 3: $t^* \in RD(\mathbb{T})$. Jede Umgebung U von $t^* = \rho^+(t^*)$ enthält ein \mathbb{T} -Intervall $[t^*, s]_{\mathbb{T}}$ mit $t^* \prec s$. Es gilt nach (I) $\mathcal{A}(t^*)$ und dann mit (iii) $\mathcal{A}(t)$ für alle $t \in [t^*, s]_{\mathbb{T}}$, wegen (4.2) sogar für alle $t \in [\tau, s]_{\mathbb{T}}$. Daraus folgt $t^* \prec s \preceq t^*$.

(c) \Rightarrow (d): Es sei $[\tau, s]_{\mathbb{T}}$ ein \mathbb{T} -beschränktes \mathbb{T} -abgeschlossenes Intervall und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine beliebige \mathbb{T} -offene Überdeckung von $[\tau, s]_{\mathbb{T}}$. Wir zeigen mittels des Induktionsprinzips für $t \in [\tau, s]_{\mathbb{T}}$

$$\mathcal{A}(t) : [\tau, t]_{\mathbb{T}} \text{ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.}$$

Die Nachweise von (i), (ii) und (iii) sind trivial. Für (iv) wähle man zunächst ein U_j aus obiger \mathbb{T} -offenen Überdeckung mit $t \in U_j$ aus und dann ein $r \in U_j$ mit $r \prec t$. Ein solches r existiert, da t links-dicht ist. Die endliche Überdeckung von $[\tau, r]_{\mathbb{T}}$ bildet zusammen mit U_j eine endliche Überdeckung von $[\tau, t]_{\mathbb{T}}$. Jedes \mathbb{T} -beschränkte und \mathbb{T} -abgeschlossene $S \subseteq \mathbb{T}$ ist als abgeschlossene Teilmenge eines \mathbb{T} -beschränkten

\mathbb{T} -abgeschlossenen Intervalls nun selbst \mathbb{T} -kompakt. Wäre umgekehrt ein \mathbb{T} -kompaktes S unbeschränkt, so ließe sich sofort eine unendliche \mathbb{T} -offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung angeben. Schließlich ist jede \mathbb{T} -kompakte Menge \mathbb{T} -abgeschlossen.

(d) \Rightarrow (e): Wir nehmen an, es gilt nicht (4.1), also

$$0 < f(\tau)f(\rho^+(\tau)) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{T}. \quad (4.3)$$

Das Urbild $A := f^{-1}((-\infty, 0)_{\mathbb{R}})$ und die Menge B aller oberen \mathbb{T} -Schranken von A in $[r, s]_{\mathbb{T}}$ sind nichtleer. Wir wählen $a \in A$, $b \in B$. Für je endlich viele der \mathbb{T} -abgeschlossenen \mathbb{T} -Intervalle $[a_i, b_i]_{\mathbb{T}} \subseteq [a, b]_{\mathbb{T}}$ mit $a_i \in A$, $b_i \in B$ und $i \in J$ mit endlicher Indexmenge J gilt

$$\bigcap_{i \in J} [a_i, b_i]_{\mathbb{T}} = [\max_{\mathbb{T}} \{a_i : i \in J\}, \min_{\mathbb{T}} \{b_i : i \in J\}]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset, \quad (4.4)$$

wegen der Kompaktheit von $[a, b]_{\mathbb{T}}$ also sogar $\bigcup_{\alpha \in A, \beta \in B} [\alpha, \beta]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$. Andernfalls müsste wegen der dualen Heine-Borel-Eigenschaft (vergleiche wieder LANG [35, p. 31, Proposition 3.1]) schon ein endlicher Schnitt solcher Intervalle leer sein, was aufgrund von (4.4) nicht möglich ist. Es existiert somit ein $c \in [r, s]_{\mathbb{T}}$ mit $\alpha \preceq c \preceq \beta$ für alle $\alpha \in A$ und $\beta \in B$. Jede Umgebung von $\rho^+(c)$ enthält ein t mit $c \prec t$ oder $t = s$, jedenfalls also ein t mit $f(t) > 0$. Die Stetigkeit von f zieht $f(\rho^+(c)) \geq 0$ nach sich und wegen (4.3) auch $f(c) > 0$. Der Punkt c kann nicht links-dicht sein, da in diesem Fall jede Umgebung U von c die Menge A trifft, was einen Widerspruch zur Stetigkeit von f in c bedingt. Ist $c \in LS(\mathbb{T})$, so gilt $\rho^+(c) \in A$; dann kann mit $\tau := \rho^-(c)$ und $\rho^+(\tau) = c$ die Annahme (4.3) nicht aufrechterhalten werden.

(e) \Rightarrow (a): S sei eine nichtleere nach oben \mathbb{T} -beschränkte Teilmenge von \mathbb{T} , B sei die nichtleere Menge der oberen \mathbb{T} -Schranken von S und A die nichtleere Menge der unteren \mathbb{T} -Schranken von B . Es seien $r \in A$, $s \in B$ mit $r \prec s$ (\mathbb{T} enthält mehr als ein Element). Wir definieren die Indikatorfunktion $f : [r, s]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t \in A, \\ 1 & \text{für } t \in B. \end{cases}$$

Besitzt A kein \mathbb{T} -Supremum und folglich B kein \mathbb{T} -Infimum, so sind die beiden Urbilder

$$f^{-1}(\{-1\}) = \bigcup_{t \in A} [r, t]_{\mathbb{T}}, \quad f^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{t \in B} [t, s]_{\mathbb{T}}$$

\mathbb{T} -offen in $[r, s]_{\mathbb{T}}$ und deshalb f stetig. Nach der Voraussetzung (e) existiert ein Punkt $\tau \in [r, s]_{\mathbb{T}}$ mit $f(\tau)f(\rho^+(\tau)) \leq 0$. Da f keine Nullstellen besitzt, gilt sogar $f(\tau)f(\rho^+(\tau)) < 0$, woraus sofort folgt $f(\tau) < 0 < f(\rho^+(\tau))$. A besitzt also doch ein \mathbb{T} -Supremum, nämlich τ , welches dann auch eines von S ist. #

Wir nennen eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ einer bedingt-vollständigen Kette (\mathbb{T}, \preceq) eine $I \setminus O$ -Teilmenge, wenn ein Intervall I und eine \mathbb{T} -offene Menge O existieren, so dass $S = I \setminus O$. Diese Mengen sind im folgenden Sinne „kanonisch“ in \mathbb{T} :

Satz 4.11 (Charakterisierung von $I \setminus O$ -Teilmengen): $S \subseteq \mathbb{T}_1$ sei eine Teilmenge einer bedingt-vollständigen Kette $(\mathbb{T}_1, \preceq_1)$ und $(\mathbb{T}_2, \preceq_2)$ eine beliebige Kette. Ferner sei $f : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ streng monoton und stetig. Dann sind folgende Aussagen für S äquivalent:

- (a) S ist eine $I \setminus O$ -Teilmenge,
- (b) das \mathbb{T}_1 -Supremum und das \mathbb{T}_1 -Infimum einer S -beschränkten Teilmenge $A \subseteq S$ sind in S enthalten,
- (c) (S, \preceq) ist bedingt-vollständig und die von \mathbb{T}_1 auf S induzierte Relativtopologie und die Ordnungstopologie von (S, \preceq) stimmen überein,
- (d) (S, \preceq) ist bedingt-vollständig und die Restriktion $f|_S : S \rightarrow \mathbb{T}_2$ ist stetig.

Beweis: (a) \Rightarrow (b) Die Aussage (b) ist zunächst für Intervalle S oder abgeschlossene Teilmengen S richtig. Da eine Teilmenge von der Form $I \setminus O$ \mathbb{T} -abgeschlossen in I ist, gilt (b) auch für diese Mengen.

(b) \Rightarrow (c) Wir müssen lediglich die zweite Teilaussage in Behauptung (c) zeigen. Da die Relativtopologie nach Satz 4.4(c) immer feiner als die Ordnungstopologie ist, machen wir die Widerspruchsannahme, sie sei echt feiner. Dann existieren ein Punkt $s \in S$ und eine relativ offene Umgebung $U = (s_1, s_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{T}_1$) von s , die nicht ordnungsoffene Umgebung von s ist. Genau eine der beiden Mengen $(s_1, s)_{\mathbb{T}_1} \cap S$, $(s, s_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$ ist leer, denn wären beide Mengen nichtleer, so wäre mit $t_1 \in (s_1, s)_{\mathbb{T}_1} \cap S$, $t_2 \in (s, s_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$ die Menge $(t_1, t_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$ eine in U enthaltende ordnungsoffene Umgebung von s . Wären beide Mengen leer, so wäre $\{s\}$ eine ordnungsoffene Umgebung von t . Beide Fälle führen also auf einen Widerspruch. Sei nun o.B.d.A. $(s_1, s)_{\mathbb{T}_1} \cap S = \emptyset$ und $t_2 \in (s, s_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$. s kann nicht minimales Element von S sein, denn andernfalls wäre $(s, t_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S = (-\infty, t_2)_{\mathbb{T}_1}$ ordnungsoffen und in U enthalten. Das geht aber nicht. Es folgt jetzt, dass $\sigma := \sup((-\infty, s)_{\mathbb{T}_1} \cap S)$ existiert und endlich ist. Im Fall $\sigma \in S$ ist $(\sigma, t_2)_{\mathbb{T}_1} \cap S$ ordnungsoffen und in U enthalten, was einen Widerspruch darstellt. Also gilt $\sigma \notin S$ und das widerspricht der Voraussetzung (b).

(c) \Rightarrow (d) Die Abbildung $f|_S : S \rightarrow \mathbb{T}_2$ ist stets in der Relativtopologie stetig.

(d) \Rightarrow (a) Sei I der Schnitt aller Intervalle, die S enthalten und $O := I \setminus S$. Es gilt dann $S = I \setminus O$ und wir müssen nur noch zeigen, dass O offen ist. Sei dazu J ein maximales Intervall von O , d.h. für jedes weitere Intervall J' von \mathbb{T} mit $J \subseteq J' \subseteq O$ gilt $J = J'$. J ist beschränkt und daher genau von einem der folgenden vier Typen $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} A : J &= (t_1, t_2)_{\mathbb{T}}, & B : J &= [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \text{ mit } t_1 \in LD(\mathbb{T}), t_2 \in RD(\mathbb{T}), \\ C : J &= [t_1, t_2)_{\mathbb{T}} \text{ mit } t_1 \in LD(\mathbb{T}), & D : J &= (t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \text{ mit } t_2 \in RD(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir die Typen B , C und D ausschließen können. Ist J vom Typ B , so besitzt die Menge $(-\infty, t_1)_{\mathbb{T}} \cap S$ kein Supremum in S und S kann daher nicht bedingt-vollständig sein. Ist J vom Typ C , so ist $f|_S : S \rightarrow \mathbb{T}_2$ nicht stetig in t_2 , da für das Urbild des offenen Intervalls $(f(t_1), \infty)_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{T}_2$ gilt

$$f|_S^{-1}((f(t_1), \infty)_{\mathbb{T}}) = f^{-1}((f(t_1), \infty)_{\mathbb{T}}) \cap S = (t_1, \infty)_{\mathbb{T}} \cap S = [t_2, \infty)_{\mathbb{T}} \cap S.$$

Dieses \mathbb{T} -Intervall ist bezüglich der Ordnungstopologie von S nicht offen, da sich für den Punkt t_2 eine S -Ordnungsumgebung in $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}} \cap S$ finden lässt. Für den Typ D schließt man entsprechend. #

Satz 4.12 (Bilder und Urbilder von $I \setminus O$ -Mengen): *Es seien $(\mathbb{T}_1, \preceq_1)$ und $(\mathbb{T}_2, \preceq_2)$ zwei bedingt-vollständige Ketten und $m : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ eine monotone stetige Abbildung. Dann gilt:*

- (a) *Das Urbild einer $I \setminus O$ -Teilmenge unter m ist wieder eine $I \setminus O$ -Teilmenge,*
- (b) *das Bild einer $I \setminus O$ -Teilmenge unter m ist wieder eine $I \setminus O$ -Teilmenge.*

Man kann in Satz 4.11 weder auf die Monotonie, noch auf die Stetigkeit der Abbildung m verzichten, wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiel 4.13: (1) Für $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2 := \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung betrachte man $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} t + 1 & \text{für } t \geq 0 \\ t - 1 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

f ist zwar (streng) monoton wachsend, aber unstetig und es gilt

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)_{\mathbb{R}}) \cup f([0, \infty)_{\mathbb{R}}) = (-\infty, -1)_{\mathbb{R}} \cup [1, \infty)_{\mathbb{R}}.$$

Das Bild der $I \setminus O$ -Teilmenge \mathbb{R} ist also nicht bedingt-vollständig ($(-\infty, -1)_{\mathbb{R}}$ besitzt kein Supremum in $f(\mathbb{R})$) und damit nach Satz 4.11 auch keine $I \setminus O$ -Teilmenge.

(2) Es seien $\mathbb{T}_1 := (-\infty, -1]_{\mathbb{R}} \cup [1, \infty)_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{T}_2 := \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{für } t \geq 0 \\ \frac{1}{t} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann ist f stetig und nicht monoton. Wir erhalten als Bild der $I \setminus O$ -Teilmenge \mathbb{T}_1

$$f(\mathbb{T}_1) = f((-\infty, -1]_{\mathbb{R}}) \cup f([1, \infty)_{\mathbb{R}}) = [-1, 0)_{\mathbb{R}} \cup [1, \infty)_{\mathbb{R}}.$$

Analog zu oben ist auch $[-1, 0)_{\mathbb{R}} \cup [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ keine $I \setminus O$ -Teilmenge.

Beweis: (a) Es sei $I_2 \setminus O_2 \subseteq \mathbb{T}_2$ eine $I \setminus O$ -Teilmenge. Dann ist wegen $m^{-1}(I_2 \setminus O_2) = m^{-1}(I_2) \setminus m^{-1}(O_2)$ das Urbild von $I_2 \setminus O_2$ eine $I \setminus O$ -Teilmenge in $(\mathbb{T}_1, \preceq_1)$.

(b) Es muss lediglich gezeigt werden, dass $m(\mathbb{T}_1)$ eine $I \setminus O$ -Teilmenge von \mathbb{T}_2 ist. Sei dazu $A \subseteq m(\mathbb{T}_1)$ nichtleer, $m(\mathbb{T}_1)$ -beschränkt und $s := \sup_{m(\mathbb{T}_1)} A \in \mathbb{T}_2$. Wir wollen $s \in m(\mathbb{T}_1)$ nachweisen und analog zeigt man, dass $\inf_{m(\mathbb{T}_1)} A \in \mathbb{T}_2$. Nach Satz 4.11(b) folgt dann die Behauptung. Wir nehmen nun an, dass $s \notin m(\mathbb{T}_1)$ gilt. Dann ist $B := m^{-1}(A) = m^{-1}((-\infty, s]_{\mathbb{T}_2})$ ein abgeschlossenes Intervall und durch irgendein Urbild einer oberen \mathbb{T}_2 -Schranke von A beschränkt. Daher gilt $b \preceq_1 \sup_{\mathbb{T}_1} B \in B$ für alle $b \in B$ und weiter

$$m(b) \preceq_2 m(\sup_{\mathbb{T}_1} B) \in m(B) = A \quad \text{für alle } b \in B.$$

Zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in B$ mit $m(b) = a$ und folglich $a \preceq_2 m(\sup_{\mathbb{T}_1} B) \leq s$ für alle $a \in A$. Demzufolge resultiert der Widerspruch $s = m(\sup_{\mathbb{T}_1} B) \in m(\mathbb{T}_1)$. #

Es ist unser Ziel, einen Differenzations-Begriff für Abbildungen zu erklären, die auf einer bedingt-vollständigen Kette (\mathbb{T}, \preceq) erklärt sind. Dazu ist es erforderlich, den Abstand zweier Elemente $s, t \in \mathbb{T}$ messen zu können.

Definition 4.14 (Wachstumseichung, Maßkette): Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine bedingt-vollständige Kette. Eine Abbildung $\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ wird Wachstumseichung genannt, falls gilt

(i) für alle $r, s, t \in \mathbb{T}$ ist $\mu(r, s) + \mu(s, t) = \mu(r, t)$ (Kozyklus-Eigenschaft),

(ii) für alle $r, s \in \mathbb{T}$ mit $s \prec r$ gilt $0 < \mu(r, s)$ (strenge Isotonie),

(iii) $\mu(\cdot, t) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig für beliebiges festes $t \in \mathbb{T}$.

Dann bezeichnet man das Tripel $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ als Maßkette, die Menge \mathbb{T} als Zeitmenge und ihre Elemente als Zeitpunkte.

Bemerkung 4.15: (1) Eine unmittelbare Konsequenz der Kozyklus-Eigenschaft sind die Eigenschaften

$$\mu(t, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}, \quad \mu(r, s) = -\mu(s, r) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{T}$$

von Wachstumseichungen.

(2) Aufgrund der Kozyklus-Eigenschaft der Wachstumseichung gilt für beliebige Zeitpunkte $r, s, t \in \mathbb{T}$, dass $\mu(r, s) = \mu(r, t) - \mu(s, t)$ ist. Daher ist die Bedingung 4.14(iii) gleichbedeutend damit, dass die Abbildung $\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich der Produkttopologie auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ stetig ist.

(3) Man kann zeigen, dass eine beliebige Wachstumseichung $\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge der Zuordnung $\nu([r, s)_{\mathbb{T}}) := \mu(s, r)$ total-additiv ist und folglich ein Maß ν auf \mathbb{T} induziert, womit die Bezeichnung Maßkette motiviert wird.

Beispiel 4.16: Ist $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ bedingt-vollständig, $0 \in \mathbb{T}$ und $\eta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sowie streng monoton wachsend, so wird auf der Kette (\mathbb{T}, \leq) durch $\mu(r, s) := \eta(r) - \eta(s)$ eine Wachstumseichung definiert.

Möchte man dynamische Prozesse mittels auf Maßketten definierter Gleichungen beschreiben, so ist es in Hinblick auf asymptotische Aussagen erforderlich, folgende Konvention zu treffen:

Definition 4.17 (unbeschränkte Maßkette): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette und $\tau \in \mathbb{T}$ fixiert.

- (a) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ heißt nach oben unbeschränkt, falls $\mu(\mathbb{T}_\tau^+, \tau)$ unbeschränkt ist,
- (b) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ heißt nach unten unbeschränkt, falls $\mu(\tau, \mathbb{T}_\tau^-)$ unbeschränkt ist,
- (c) schließlich wird $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ als beidseitig unbeschränkt bezeichnet, falls $\mu(\mathbb{T}_\tau^+, \tau)$ nach oben und $\mu(\tau, \mathbb{T}_\tau^-)$ nach unten unbeschränkt ist. Ist $\mu(\mathbb{T}_\tau^+, \tau)$ oder $\mu(\tau, \mathbb{T}_\tau^-)$ unbeschränkt, so nennt man $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ unbeschränkt.

Bemerkung 4.18: Es ist eine einfache Konsequenz der Kozyklus-Eigenschaft aus Definition 4.14(i), dass im Fall einer nach oben bzw. nach unten unbeschränkten Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ jede der Mengen $\mu(\mathbb{T}_t^+, t)$ bzw. $\mu(t, \mathbb{T}_t^-)$ für beliebiges $t \in \mathbb{T}$ nach oben bzw. nach unten unbeschränkt ist. Folglich ist die obige Definition 4.17 unabhängig vom Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{T}$.

Beispiel 4.19: Mit der üblichen Wachstumseichung $\lambda(r, s) := r - s$, ist $(\mathbb{R}, \leq, \lambda)$ eine unbeschränkte Maßkette. Dagegen ist $(\mathbb{R}, \leq, \mu_1)$ mit $\mu_1(r, s) := \arctan r - \arctan s$ nicht unbeschränkt und $(\mathbb{R}, \leq, \mu_2)$ mit $\mu_2(r, s) := e^r - e^s$ nur nach oben unbeschränkt (vergleiche hierzu Beispiel 4.16).

Die oben stehende Definition 4.17 ist in folgendem Sinne konsistent mit dem Begriff der \mathbb{T} -Beschränktheit aus Definition 1.5:

Korollar 4.20: Ist $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine nach oben bzw. nach unten unbeschränkte Maßkette, so ist (\mathbb{T}, \preceq) nicht nach oben bzw. nach unten \mathbb{T} -beschränkt.

Beweis: Es genügt die Behauptung für nach oben unbeschränkte Maßketten zu beweisen. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, die Kette (\mathbb{T}, \preceq) sei nach oben \mathbb{T} -beschränkt. Dann gibt es nach Definition 1.5(a) ein $t^+ \in \mathbb{T}$ mit $t \preceq t^+$ für alle $t \in \mathbb{T}_\tau^+$. Wegen Satz 2.9 ist $[\tau, t^+]_{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_\tau^+$ kompakt in der Ordnungstopologie und die stetige Funktion $\mu(\cdot, \tau)$ daher beschränkt auf \mathbb{T}_τ^+ . Dies widerspricht aber der Unbeschränktheit der Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$. #

Wie das obige Beispiel 4.19 zeigt, gilt die Umkehrung von Korollar 4.20 nicht.

Lemma 4.21 (Teilmaßketten): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette und $S \subseteq \mathbb{T}$ eine Teilmenge. Dann bildet das Tripel $(S, \preceq, \mu|_{S \times S})$ genau dann eine Maßkette, wenn S eine $I \setminus O$ -Teilmenge von \mathbb{T} ist. Wir nennen $(S, \preceq, \mu|_{S \times S})$ eine Teilmaßkette.

Beweis: Es sei $\tau \in \mathbb{T}$ fest. Dann ist $\mu(\cdot, \tau) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Die Behauptung ergibt sich aus Satz 4.11. #

Beispiel 4.22: Auf der Kette der reellen Zahlen (\mathbb{R}, \leq) ist durch $\lambda(r, s) := r - s$ eine Wachstumseichung gegeben. Sie induziert das Lebesgue'sche Maß auf \mathbb{R} . Für jede $I \setminus O$ -Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ bildet dann $(S, \leq, \lambda|_{S \times S})$ eine Teilmaßkette. Insbesondere werden auf $S = \mathbb{R}$ und $S = h\mathbb{Z}$ kontinuierliche und diskrete dynamische Prozesse modelliert.

Es stellt sich nun die Frage, welche Verbindung zwischen beliebigen Maßketten und den „reellen Ketten“ aus obigem Beispiel 4.22 besteht. Dazu eine vorbereitende Bezeichnung:

Sind durch $(\mathbb{T}_1, \preceq_1, \mu_1)$ und $(\mathbb{T}_2, \preceq_2, \mu_2)$ zwei beliebige Maßketten gegeben, so nennen wir eine Abbildung $m : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ Maßkettenhomomorphismus, falls gilt

$$\mu_2(m(s), m(r)) = \mu_1(s, r) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{T}_1.$$

m ist dann auch streng monoton und stetig. Dazu rechnet man einfach nach, dass das Urbild eines offenen Intervalls $(r, s)_{\mathbb{T}_2}$ bei Wahl eines festen $\tau \in \mathbb{T}_1$ durch

$$m^{-1}((r, s)_{\mathbb{T}_2}) = (\mu(\cdot, \tau))^{-1}((\mu_2(r, m(\tau)), \mu_2(s, m(\tau)))_{\mathbb{R}})$$

gegeben ist, also offen ist.

Es ist einsichtig, dass ein surjektiver Maßkettenhomomorphismus einen eben solchen als Umkehrabbildung besitzt und damit ein sog. Maßkettenisomorphismus ist.

Nach dem Satz 4.12 ist das Bild einer Maßkette $(\mathbb{T}_1, \preceq_1, \mu_1)$ unter einem Maßkettenhomomorphismus $m : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ eine $I \setminus O$ -Teilmenge des Bildraumes \mathbb{T}_2 , also eine Teilmaßkette von $(\mathbb{T}_2, \preceq_2, \mu_2)$. \mathbb{T}_1 selbst ist isomorph zu seinem Bild.

Satz 4.23: *Jede Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist isomorph zu einer Maßkette $(I \setminus O, \leq, \lambda)$, wobei I ein reelles Intervall, O eine offene Teilmenge von \mathbb{R} und λ durch $\lambda(r, s) = r - s$ gegeben ist.*

Beweis: Für jede Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ und festes $\tau \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $\mu(\cdot, \tau) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Maßkettenhomomorphismus nach $(\mathbb{R}, \leq, \lambda)$. #

Es wäre jetzt möglich, die Entwicklung des Maßkettenkalküls von diesem Standpunkt aus voranzutreiben und nur noch (abgeschlossene) Teilmengen von \mathbb{R} betrachten. Allerdings ist unsere axiomatische abstrakte Formulierung unabhängig von seiner Einbettung in die reellen Zahlen und daher begrifflich klarer, womit wir sie weiterverfolgen.

Die Existenz einer Wachstumseichung hat Konsequenzen hinsichtlich der Topologie auf \mathbb{T} .

Satz 4.24 (Topologie auf Maßketten): *Ist $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette und (\mathbb{T}, \preceq) versehen mit der Ordnungstopologie. Dann gilt:*

- (a) \mathbb{T} ist metrisierbar vermöge der Metrik $d(r, s) := |\mu(r, s)|$, erfüllt also das erste Abzählbarkeitsaxiom,
- (b) \mathbb{T} ist ein K_δ -Raum, d.h. die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen,
- (c) \mathbb{T} ist separabel.

Bemerkung 4.25: (1) Insbesondere können wir dann für $\varepsilon > 0$ und $\tau \in \mathbb{T}$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_\varepsilon(\tau) &:= \{t \in \mathbb{T} : |\mu(t, \tau)| < \varepsilon\}, & \bar{\mathbb{I}}_\varepsilon(\tau) &:= \{t \in \mathbb{T} : |\mu(t, \tau)| \leq \varepsilon\}, \\ \mathbb{I}_\varepsilon^+(\tau) &:= \{t \in \mathbb{T} : 0 \leq \mu(t, \tau) < \varepsilon\}, & \bar{\mathbb{I}}_\varepsilon^+(\tau) &:= \{t \in \mathbb{T} : 0 \leq \mu(t, \tau) \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

(einseitige) ε -Umgebungen auf Maßketten definieren.

(2) Da die Kette (\mathbb{T}, \preceq) bedingt-vollständig ist, muss (\mathbb{T}, d) ein vollständiger metrischer Raum sein.

Beweis: Es sei $\tau \in \mathbb{T}$ fest.

(a) In einer offenen Umgebung $(r, s)_\mathbb{T}$ von τ ist die offene ε -Kugel $\mathbb{I}_\varepsilon(\tau)$ mit $\varepsilon := \min\{|\mu(r, \tau)|, |\mu(s, \tau)|\}$ enthalten. Also ist die metrische Topologie feiner als die Ordnungstopologie. Umgekehrt ist aufgrund der Stetigkeit von μ in einer ε -Kugel $\mathbb{I}_\varepsilon(\tau)$ stets das ordnungsoffene Urbild der reellen Nullumgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)_\mathbb{R}$ enthalten.

(b) Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die reellen Zahlen

$$a_n := \begin{cases} -n & \text{für } \inf_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) = -\infty \\ \inf_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) + \frac{1}{n} & \text{für } \inf_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) \notin \mu(\mathbb{T}, \tau) \\ \inf_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) & \text{für } \inf_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) \in \mu(\mathbb{T}, \tau) \end{cases}$$

$$b_n := \begin{cases} n & \text{für } \sup_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) = \infty \\ \sup_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) - \frac{1}{n} & \text{für } \sup_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) \notin \mu(\mathbb{T}, \tau) \\ \sup_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) & \text{für } \sup_{\mathbb{R}} \mu(\mathbb{T}, \tau) \in \mu(\mathbb{T}, \tau) \end{cases}$$

Dann ist die Menge $\mu^{-1}([a_n, b_n]_\mathbb{R})$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt und es gilt

$$\mathbb{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu^{-1}([a_n, b_n]_\mathbb{R}).$$

(c) Die Menge \mathbb{T} ist metrisierbar und nach Satz 3.13 lokal-kompakt. Die Behauptung folgt nun mit DIEUDONNÉ [12, p. 70, Satz 3.18.3]. Damit ist alles gezeigt. #

Korollar 4.26 (Stetigkeit auf Maßketten): Ist $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette, \mathcal{X} ein topologischer Raum und $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung, so gilt:

- (a) f ist genau dann stetig im Punkt $t_0 \in \mathbb{T}$, wenn für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{T} mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(t_0)$,
- (b) f ist genau dann stetig auf einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$, wenn f stetig in jedem $t \in S$ ist.

Beweis: (a) Da \mathbb{T} nach Satz 4.24(a) das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, resultiert die Behauptung aus QUERENBURG [39, p. 54, Satz 5.5(b)].

(b) Die Aussage (b) erhält man mittels QUERENBURG [39, p. 23, Satz 2.36]. #

Eine weitere Konsequenz der Metrisierbarkeit von Maßketten besteht darin, dass Grenzwerte von Funktionen mit Bildern in einem topologischen Raum, mittels Folgen in \mathbb{T} erklärt werden können:

Definition 4.27 (Grenzwerte von Funktionen): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette, \mathcal{X} ein topologischer Raum und $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- (i) Wir sagen, f besitzt in $t_0 \in \mathbb{T}$ den Grenzwert $x_0 \in \mathcal{X}$, wenn f in t_0 stetig mit $f(t_0) = x_0$ ist und schreiben dann $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = x_0$,
- (ii) wir sagen, f besitzt in $t_0 \in \mathbb{T}$ den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert $x_0 \in \mathcal{X}$, wenn für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(-\infty, t_0)_{\mathbb{T}}$ bzw. $(t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = x_0$$

gilt und schreiben dann

$$\lim_{t \nearrow t_0} f(t) = x_0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \searrow t_0} f(t) = x_0,$$

- (iii) ist $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ schließlich nach oben unbeschränkt, so sagt man, f besitzt für $t \rightarrow \infty$ den Grenzwert $x_0 \in \mathcal{X}$, falls es zu jeder Umgebung $U \subseteq \mathcal{X}$ von x_0 ein $t_0 \in \mathbb{T}$ gibt, so dass $f(t) \in U$ für alle $t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$, und schreibt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = x_0$. Analog sind Grenzwerte für $t \rightarrow -\infty$ erklärt, falls $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ nach unten unbeschränkt ist.

Abschließend gehen wir noch auf uneigentliche Grenzwerte ein:

Definition 4.28 (uneigentliche Grenzwerte): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine nach oben unbeschränkte Maßkette und $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sagt man, f konvergiert für $t \rightarrow \infty$ uneigentlich gegen ∞ , wenn es zu jedem $C > 0$ ein $t^+ \in \mathbb{T}$ gibt, mit $C \leq f(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}_{t^+}^+$ und schreibt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$. Analog sind uneigentliche Grenzwerte für $t \rightarrow -\infty$ erklärt, falls $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ nach unten unbeschränkt ist.

Beweis: Auf nach oben bzw. unten unbeschränkten Maßketten gilt offenbar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t, \tau) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mu(\tau, t) = \infty$$

mit dem $\tau \in \mathbb{T}$ aus Definition 4.17. #

Bislang haben wir in Maßketten keine der beiden Zeitrichtungen ausgezeichnet. Von nun an werden wir diese Symmetrie aufgeben. Dies lässt sich schon aus dem Grunde nicht vermeiden, da unser Kalkül die klassische Differenzenrechnung — mit dem Vorwärts-Differenzenoperator

$$(\Delta_+ x)(t) := x(t+1) - x(t) \tag{4.5}$$

für $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ und einen linearen Raum \mathcal{X} — als Spezialfall enthalten soll und bei der Differenzenbildung ist bekanntlich eine Asymmetrie in natürlicher Weise gegeben. Wir werden die Zeitrichtung mit wachsenden Zeitpunkten bevorzugen. Zunächst wird eine Funktion definiert, die den Abstand eines Zeitpunktes $t \in \mathbb{Z}$ zu seinem rechten Nachbarn misst.

Definition 4.29 (κ -Operator, Körnigkeit): Es sei (\mathbb{T}, \preceq) eine bedingt-vollständige Kette und $S \subseteq \mathbb{T}$. Dann definieren wir durch

$$S^\kappa := \{t \in S : t \text{ ist nicht } \mathbb{T}\text{-maximal oder links-dicht}\}$$

den κ -Operator $\cdot^\kappa : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{T})$ auf der Potenzmenge von \mathbb{T} . Die Elemente der Menge \mathbb{T}^κ heißen nicht-ausgeartet. Ist $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette, so heißt die mittels

$$\mu^*(t) := \mu(\rho^+(t), t)$$

definierte Abbildung $\mu^* : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ die Körnigkeit der Zeitmenge \mathbb{T} .

Bemerkung 4.30: (1) Der Fall $\mathbb{T} = \mathbb{T}^\kappa$ tritt genau dann ein, wenn \mathbb{T} kein links-zerstreutes \mathbb{T} -Maximum hat, d.h. entweder ein links-dichtes oder überhaupt kein \mathbb{T} -Maximum besitzt.

(2) Unmittelbar aus der Definition von S^κ ergibt sich folgende Charakterisierung:

$$S^\kappa = \begin{cases} S & \text{für nicht nach oben } \mathbb{T}\text{-beschränktes } S \\ S \setminus (\rho^-(\max_{\mathbb{T}} S), \max_{\mathbb{T}} S]_{\mathbb{T}} & \text{für nach oben } \mathbb{T}\text{-beschränktes } S \end{cases}.$$

(3) Die Zeitmengen mittels denen dynamische Systeme modelliert werden, zeichnen sich durch konstante Körnigkeit aus, wie die Beispiele $\mu^*(t) \equiv 0$ für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ oder $\mu^*(t) \equiv h$ für $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ zeigen.

Beispiel 4.31: Folgende Beispiele verdeutlichen die Anwendung des „ κ -Operators“:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}_\tau^+)^{\kappa} &= \mathbb{R}_\tau^+, & (\mathbb{Z}_\tau^+)^{\kappa} &= \mathbb{Z}_\tau^+, \\ \{1, \dots, n\}^{\kappa} &= \{1, \dots, n-1\}, & \{n\}^{\kappa} &= \emptyset \end{aligned}$$

für $\tau \in \mathbb{R}$ bzw. $\tau \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wir charakterisieren nun die nicht-ausgearteten Elemente einer Kette. Rechts-zerstreute Elemente brauchen wir dabei nicht zu betrachten, denn das eventuell vorhandene \mathbb{T} -maximale Element einer Kette ist nach den Definitionen 3.2 und 3.5 rechts-dicht.

Satz 4.32 (Charakterisierung nicht-ausgearteter Elemente): Das Element $t \in RD(\mathbb{T})$ einer Kette (\mathbb{T}, \preceq) ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn jede Umgebung von t ein Element aus \mathbb{T} ungleich t enthält.

Beweis: Wir haben zwei Richtungen nachzuweisen:

(\Leftarrow) Ist t ausgeartet, d.h. \mathbb{T} -maximal und links-zerstreut, so gibt es nach Satz 3.8(a) eine Umgebung, welche lediglich t enthält.

(\Rightarrow) Ist t nicht-ausgeartet, so ist t entweder links-dichtes \mathbb{T} -Maximum oder nicht \mathbb{T} -maximal. In jedem Fall liefert dann Satz 3.10 die Behauptung, wenn man noch beachtet, dass ein \mathbb{T} -Maximum einer Kette nicht gleichzeitig \mathbb{T} -Minimum sein kann, da Ketten laut Definition 1.1 mindestens zwei Elemente besitzen. #

Korollar 4.33: In jeder Umgebung eines Punktes $t \in \mathbb{T}^\kappa$ gibt es ein von t verschiedenes Element $s \in \mathbb{T}$ mit $s \neq \rho^+(t)$.

Beweis: Ist t rechts-dicht, also $\rho^+(t) = t$, so folgt die Aussage aus Satz 4.32. Ist t dagegen rechts-zerstreut, also $t \prec \rho^+(t)$, so kann t die Rolle von s übernehmen. #

Für eine Anwendung an späterer Stelle halten wir fest:

Satz 4.34 (Stetigkeit der Körnigkeit): Genau dann ist die Körnigkeit $\mu^* : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ nicht stetig, wenn t links-dicht, rechts-zerstreut und nicht minimal ist.

Beispiel 4.35: Die Körnigkeit ist im Allgemeinen unstetig, wie das Beispiel der Zeitmenge $\mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ zeigt, denn es ist

$$\mu^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{für } t - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Beweis: (\Rightarrow) Es sei $t \in LS(\mathbb{T})$ oder $t \in RD(\mathbb{T})$ oder minimal.

1. Fall: $t \in LS(\mathbb{T})$ oder minimal. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von t (nämlich eine mit $t = \min_{\mathbb{T}} U$), so dass $|\mu^*(s) - \mu^*(t)| < \varepsilon$ für alle $s \in U$.

2. Fall: t ist weder links-zerstreut noch minimal. Dann ist t links-dicht und nach Voraussetzung rechts-dicht; es ist $\mu^*(t) = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von t , so dass $\mu^*(s) < \varepsilon$ für alle $s \in U$.

(\Leftarrow) Sei $t \in LD(\mathbb{T}) \cap RS(\mathbb{T})$ und nicht minimal. Es gilt folglich $\mu^*(t) > 0$. In jeder Umgebung von t existiert ein Zeitpunkt $s \prec t$ mit $\mu^*(s) < \frac{\mu^*(t)}{2}$. Daher ist μ^* unstetig. #

5 Zeitskalen

Mit Blick auf den Satz 4.23 und die Anwendungen, haben diejenigen Maßketten besondere Bedeutung, welche durch die reellen Zahlen „induziert“ werden. Wir wollen hier einige Aussagen über ihre Spurtopologie machen.

Definition 5.1 (Zeitskala): Ist \mathbb{T} eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} mit mehr als zwei Elementen und $\lambda : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(r, s) := r - s$, so wird die Maßkette $(\mathbb{T}, \lambda, \leq)$ (oder abkürzend einfach \mathbb{T}) als Zeitskala bezeichnet.

Bemerkung 5.2: Nach dem Beispiel 4.22 ist durch $(\mathbb{T}, \leq, \lambda)$ eine Maßkette gegeben. Wir nennen die Zeitmenge \mathbb{T} dann eine homogene Zeitskala, falls die Körnigkeit μ^* auf \mathbb{T} konstant ist und andernfalls inhomogen. Diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme lassen sich gerade mittels homogener Zeitskalen modellieren, deren analoge Eigenschaften in DÖFFINGER [14] aufgezeigt werden.

Beispiel 5.3: Um die Leistungsfähigkeit des zu entwickelnden Kalküls zu demonstrieren, geben wir hier einige Beispiele für Zeitskalen an, die sowohl aus praktischer, als auch aus mathematischer Sicht interessant sind, wie im folgenden Abschnitt 6 und in Hinblick auf die in der Einleitung erwähnten dynamischen Gleichungen deutlich wird.

- Bei $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ erhält man die gewöhnliche Differenzialrechnung,
- für $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ($h > 0$) resultiert die gewöhnliche Differenzenrechnung,
- im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{D}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{Z} + \mathbb{D}$ mit einer Cantor-Menge $\mathbb{D} \subset [0, 1]_{\mathbb{R}}$, ergibt sich ein seltsames Beispiel einer Zeitskala, welche primär die Allgemeinheit unseres Konzepts demonstriert,
- in der Situation $\mathbb{T} = \mathbb{S}_x$ mit einer endlichen oder unendlichen reellen Folge x definieren wir

$$\mathbb{S}_x := \begin{cases} \{x_k : k \in \{1, \dots, n\}\} & \text{für } x = (x_k)_{k=1, \dots, n} \\ \{x_k : k \in \mathbb{N}\} & \text{für } x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \end{cases}, \quad (5.1)$$

womit sich numerische Verfahren (mit gegebenenfalls variabler Schrittweite) modellieren lassen,

- bei $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} + [a, b]_{\mathbb{R}}$ ($h > 0$, $0 \leq a < b \leq h$) erhalten eine Folge abgeschlossener Intervalle, womit sich Differenzialgleichungen mit Impulsen modellieren lassen. Strenggenommen ist hierbei aber zu beachten, dass die Lösungen von impulsiven Differenzialgleichungen weiterhin auf Intervallen definiert sind (vergleiche LAKSHMIKANTHAM, BAINOV & SIMEONOV [33, p. 12, Definition 1.2.1]).

Homogene Zeitskalen sind \mathbb{R} oder $h\mathbb{Z}$, wogegen \mathbb{D} , $\mathbb{Z} + \mathbb{D}$ oder etwa $\mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ inhomogen sind.

Anhand einiger elementarer Resultate wollen wir nun demonstrieren, welche Verbindung zwischen der gewöhnlichen Topologie auf \mathbb{R} und der von ihr induzierten Topologie auf Zeitskalen \mathbb{T} besteht. Wir beginnen mit Aussagen zur Beschränktheit.

Offensichtlich ist für eine vorgelegte Teilmenge S einer Zeitskala \mathbb{T} jede obere \mathbb{T} -Schranke auch eine obere \mathbb{R} -Schranke. Ebenso offensichtlich muss aber nicht jede obere \mathbb{R} -Schranke eine obere \mathbb{T} -Schranke sein (vergleiche Definition 1.5). Ob jedoch aus der Existenz einer oberen \mathbb{R} -Schranke die Existenz einer oberen \mathbb{T} -Schranke oder gar die Existenz einer kleinsten oberen \mathbb{T} -Schranke folgt, ist nicht unmittelbar einsichtig. Ließe man für den Moment als Zeitskalen auch nicht-abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R} zu, wie etwa das Intervall $\mathbb{T} = [0, 1)_{\mathbb{R}}$, so sieht man, dass diese letzte Frage zu verneinen ist, denn $S := \mathbb{T}$ ist zwar \mathbb{R} -beschränkt, besitzt jedoch keine obere \mathbb{T} -Schranke, geschweige denn ein \mathbb{T} -Supremum. Dass unter unserer Generalvoraussetzung der Abgeschlossenheit von \mathbb{T} diese Frage doch eine positive Antwort zulässt, zeigen wir als Nächstes. Zuvor stellen wir jedoch ein auch ohne die Abgeschlossenheit von \mathbb{T} gültiges Lemma bereit.

Lemma 5.4: *Ist $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ und besitzt die Teilmenge S ein T -Supremum, so ist dieses eindeutig bestimmt durch die Beziehung $\sup_T S = \inf_{\mathbb{R}} \{t \in T : t \text{ ist obere } T\text{-Schranke von } S\}$ und es gilt die Ungleichung $\sup_{\mathbb{R}} S \leq \sup_T S$.*

Beweis: Aus der Existenz des T -Supremums von S folgt, dass S nichtleer und nach oben T -beschränkt ist. Also existiert die reelle Zahl $\sigma := \inf_{\mathbb{R}} \{t \in T : t \text{ ist obere } T\text{-Schranke von } S\}$.

(I) Dass $\sigma = \sup_T S$ gilt, ergibt sich wie folgt. Die Annahme $\sup_T S < \sigma$ widerspricht der Definition von σ und die Annahme $\sigma < \sup_T S$ liefert einen Widerspruch zur Definition des T -Supremums.

(II) Mit der aus der reellen Analysis bekannten Beziehung

$$\sup_{\mathbb{R}} S = \inf_{\mathbb{R}} \{t \in T : t \text{ ist obere } T\text{-Schranke von } S\}$$

und der Inklusion

$$\{t \in T : t \text{ ist obere } T\text{-Schranke von } S\} \subseteq \{t \in \mathbb{R} : t \text{ ist obere } \mathbb{R}\text{-Schranke von } S\}$$

folgt mit dem bereits bewiesenen Teil (I) die Ungleichung $\sup_{\mathbb{R}} S \leq \sup_T S$. #

Bemerkung 5.5: Das oben bewiesene Lemma 5.4 gilt insbesondere, falls T abgeschlossen, d.h. falls $\mathbb{T} := T$ eine Zeitskala ist. Im T dagegen nicht abgeschlossen, so ist sogar die strenge Ungleichung $\sup_{\mathbb{R}} S < \sup_T S$ und $\sup_{\mathbb{R}} S \notin S$ möglich, wie das Beispiel der Mengen $S := [0, 1)_{\mathbb{R}}$ und $T := S \cup \{2\}$ zeigt.

Dass die geschilderte Komplikation bei abgeschlossenen Mengen — also Zeitskalen — nicht eintreten kann, zeigt folgender

Satz 5.6 (Beschränktheit in Zeitskalen): *Für eine nichtleere Teilmenge S einer Zeitskala \mathbb{T} folgt:*

(a) *$S \subseteq \mathbb{T}$ ist genau dann nach oben \mathbb{T} -beschränkt, wenn sie nach oben \mathbb{R} -beschränkt ist. In diesem Fall existiert neben dem \mathbb{R} -Supremum von S auch das \mathbb{T} -Supremum von S und es gilt*

$$\sup_{\mathbb{T}} S = \sup_{\mathbb{R}} S \in \mathbb{T},$$

(b) *$S \subseteq \mathbb{T}$ ist genau dann nach unten \mathbb{T} -beschränkt, wenn sie nach unten \mathbb{R} -beschränkt ist. In diesem Fall existiert neben dem \mathbb{R} -Infimum von S auch das \mathbb{T} -Infimum von S und es gilt*

$$\inf_{\mathbb{T}} S = \inf_{\mathbb{R}} S \in \mathbb{T}.$$

Beweis: O.E. zeigen wir lediglich die Behauptung (a).

(I) Aus der \mathbb{T} -Beschränktheit nach oben folgt trivialerweise die \mathbb{R} -Beschränktheit nach oben.

(II) S sei nach oben \mathbb{R} -Beschränkt, d.h. es existiert die reelle Zahl

$$\sigma := \sup_{\mathbb{R}} S = \inf_{\mathbb{R}} \{t \in \mathbb{T} : t \text{ ist obere } \mathbb{T}\text{-Schranke von } S\}.$$

Für die \mathbb{T} -Beschränktheit von S nach oben genügt es nun zu zeigen, dass σ zu \mathbb{T} gehört. Wir nehmen an, dass σ nicht zu \mathbb{T} , also zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$ gehört. Wegen der Abgeschlossenheit von \mathbb{T} ist dann $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$ offen in \mathbb{R} , d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon)_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$. Damit ist etwa $\sigma - \frac{\varepsilon}{2}$ eine obere \mathbb{R} -Schranke von S im Widerspruch zur Definition von σ .

(III) Dass σ das \mathbb{T} -Supremum von S ist, beweisen wir indirekt. Gäbe es eine \mathbb{T} -Schranke $\rho < \sigma$, so wäre ρ auch \mathbb{R} -Schranke von S , zudem kleiner als $\sup_{\mathbb{R}} S$. Das ist ein Widerspruch. #

Satz 5.7 (Offenheit von Zeitskalen): *Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ der Zeitskala \mathbb{T} ist genau dann \mathbb{T} -offen, wenn es eine \mathbb{R} -offene Menge $R \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $S = R \cap \mathbb{T}$.*

Beweis: Wir zeigen Hin- und Rückrichtung:

(\Rightarrow) S sei \mathbb{T} -offen, also existiert zu jedem $t \in S$ ein $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ mit $\mathbb{I}_\varepsilon(t) \subseteq S$. Dann ist die Vereinigung $R := \bigcup_{t \in S} (t - \varepsilon, t + \varepsilon)_\mathbb{R}$ eine \mathbb{R} -offene Menge mit $S \subseteq R \cap \mathbb{T} \subseteq S$.

(\Leftarrow) R sei \mathbb{R} -offen mit $S = R \cap \mathbb{T}$. Dann existiert zu beliebigem $t \in S$ ein $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ mit der Eigenschaft $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)_\mathbb{R} \subseteq R$, d.h. es gilt $\mathbb{I}_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)_\mathbb{R} \cap \mathbb{T} \subseteq R \cap \mathbb{T} = S$. #

Satz 5.8: Jede \mathbb{R} -offene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ einer Zeitskala \mathbb{T} ist \mathbb{T} -offen.

Bemerkung 5.9: Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, wie man am Beispiel der Zeitskala \mathbb{Z} sieht, bei der jede Teilmenge \mathbb{Z} -offen, aber nicht \mathbb{R} -offen ist.

Beweis: Bei \mathbb{R} -offenem $S \subseteq \mathbb{R}$ gibt es zu jedem $t \in S$ ein $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ mit $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)_\mathbb{R} \subseteq S$, also gilt $\mathbb{I}_\varepsilon(t) = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)_\mathbb{R} \cap \mathbb{T} \subseteq S \cap \mathbb{T} = S$. #

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit dem zur \mathbb{T} -Offenheit dualen Begriff der \mathbb{T} -Abgeschlossenheit:

Satz 5.10 (Abgeschlossenheit von Zeitskalen): Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ einer Zeitskala \mathbb{T} ist genau dann \mathbb{T} -abgeschlossen, wenn es eine \mathbb{R} -abgeschlossene Menge $R \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $S = R \cap \mathbb{T}$.

Beweis: Wir haben wieder Hin- und Rückrichtung zu zeigen:

(\Rightarrow) Ist S \mathbb{T} -abgeschlossen, so ist $\mathbb{T} \setminus S$ \mathbb{T} -offen. Also existiert nach Satz 5.7 eine \mathbb{R} -offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathbb{T} \setminus S = T \cap \mathbb{T}$. Die Menge $R := \mathbb{R} \setminus T$ ist dann \mathbb{R} -abgeschlossen und es gilt

$$S = \mathbb{T} \setminus (\mathbb{T} \setminus S) = \mathbb{T} \setminus (T \cap \mathbb{T}) = \mathbb{T} \setminus T = \mathbb{T} \cap (\mathbb{R} \setminus T) = \mathbb{T} \cap R.$$

(\Leftarrow) $R \subseteq \mathbb{R}$ sei \mathbb{R} -abgeschlossen mit $S = R \cap \mathbb{T}$. Für die \mathbb{R} -offene Menge $T := \mathbb{R} \setminus R$ gilt dann

$$\mathbb{T} \setminus S = \mathbb{T} \setminus (R \cap \mathbb{T}) = \mathbb{T} \setminus R = \mathbb{T} \cap (\mathbb{R} \setminus R) = \mathbb{T} \cap T,$$

also ist $\mathbb{T} \setminus S$ nach Satz 5.7 \mathbb{T} -offen und damit S \mathbb{T} -abgeschlossen. #

Satz 5.11: Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ einer Zeitskala \mathbb{T} ist dann und nur dann \mathbb{R} -abgeschlossen, wenn sie \mathbb{T} -abgeschlossen ist.

Bemerkung 5.12: (1) Man beachte den Unterschied zwischen der Äquivalenz-Aussage dieses Satzes 5.11 und Nicht-Äquivalenz-Aussage von Satz 5.8.

(2) Jede \mathbb{T} -abgeschlossene Teilmenge (mit mehr als zwei Elementen) einer Zeitskala ist selbst wieder eine Zeitskala.

Beweis: (\Rightarrow) Ist S \mathbb{R} -abgeschlossen, so ist $\mathbb{R} \setminus S$ \mathbb{R} -offen. Wegen $\mathbb{T} \setminus S = \mathbb{T} \cap (\mathbb{R} \setminus S)$ ist $\mathbb{T} \setminus S$ nach Satz 5.7 \mathbb{T} -offen, also S selbst \mathbb{T} -abgeschlossen.

(\Leftarrow) Ist S \mathbb{T} -abgeschlossen, so existiert nach Satz 5.10 eine \mathbb{R} -abgeschlossene Menge $R \subseteq \mathbb{R}$ mit $S = R \cap \mathbb{T}$. Da \mathbb{T} als Zeitskala \mathbb{R} -abgeschlossen ist, folgt die \mathbb{R} -Abgeschlossenheit von der Teilmenge S als Durchschnitt zweier \mathbb{R} -abgeschlossener Teilmengen. #

Die topologischen Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ sind damit im Fall von Zeitskalen erschöpfend behandelt. Ergänzend nennen wir eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ einer Zeitskala \mathbb{T} noch \mathbb{T} -kompakt, wenn sie \mathbb{T} -beschränkt und \mathbb{T} -abgeschlossen ist; dies ist in Übereinstimmung mit Satz 4.10(d). Nach den Sätzen 5.6 und 5.11 ist S genau dann \mathbb{T} -kompakt, wenn sie \mathbb{R} -kompakt ist.

6 Differenziation

Um dynamische Vorgänge zu beschreiben, benötigt man eine geeignete Zeitmenge — womit wir von nun an wieder eine Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ meinen — \mathbb{T} und einen geeigneten Phasenraum, etwa einen Banach-Raum \mathcal{X} über dem Körper \mathbb{F} ; hierbei steht \mathbb{F} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Wir unterdrücken die Abhängigkeit der Maßkette von der linearen Ordnung und nennen das Tripel $(\mathbb{T}, \mu, \mathcal{X})$ ein dynamisches Tripel.

Der Begriff der Differenzierbarkeit überträgt sich für Funktionen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ von der reellen Analysis nicht so problemlos wie der Begriff der Stetigkeit (vergleiche Korollar 4.26). Dies liegt daran, dass die \mathbb{T} -Offenheit von der \mathbb{R} -Offenheit abweicht. Im Fall von Zeitskalen vergleiche man hierzu Satz 5.8. Ferner sei darauf hingewiesen, dass auf \mathbb{T} keine algebraische Struktur, wie etwa die einer Gruppe, benötigt wird.

Definition 6.1 (Ableitung, differenzierbar): *Es sei $(\mathbb{T}, \mu, \mathcal{X})$ ein dynamisches Tripel und $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung. f besitzt im Punkt $t_0 \in \mathbb{T}$ die Ableitung $f^\Delta(t_0) \in \mathcal{X}$, wenn zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von t_0 existiert, so dass gilt*

$$\|f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t)f^\Delta(t_0)\| \leq \varepsilon |\mu(\rho^+(t_0), t)| \quad \text{für alle } t \in U. \quad (6.1)$$

f heißt differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{T}$, wenn f in t_0 genau eine Ableitung $f^\Delta(t_0)$ besitzt.

Bemerkung 6.2: (1) Alternativ zu (6.1) lässt sich die Ableitung wie folgt als Grenzwert charakterisieren

$$f^\Delta(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \rho^+(t) \neq t_0}} \frac{f(\rho^+(t)) - f(t_0)}{\mu(\rho^+(t), t_0)},$$

welcher unter Umständen einfacher zu handhaben ist.

(2) In der Stabilitätstheorie sind differenzierbare Ljapunov-Funktionen häufig zu restriktiv und man muss mit sog. Dini-Ableitungen arbeiten. Deren Verallgemeinerung in den Maßkettenkalkül findet sich bei LAKSHMIKANTHAM & SIVASUNDARAM [31, Definition 2.6].

Beispiel 6.3: (1) Für die Zeitskala \mathbb{R} gilt $\mu^*(t) \equiv 0$ und wir erhalten gerade die aus der Analysis bekannte Differenzierbarkeit mit

$$f^\Delta(t_0) = \dot{f}(t_0);$$

in Hinblick auf die übliche Definition der Ableitung als Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathcal{X})$ beachte man hierbei die Identifikation $\mathcal{X} \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathcal{X})$.

(2) Bei der homogenen diskreten Zeitskala $h\mathbb{Z}$ ist $\rho^+(t) \equiv h$. Man kann als Umgebung U dann etwa das offene $h\mathbb{Z}$ -Intervall $(t_0 - h, t_0 + h)_{\mathbb{T}} = \{t_0\}$ wählen und so bleibt die Ungleichung (6.1) nur für $t = t_0$ zu überprüfen. Dann ist jede Abbildung $f : h\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar und man erhält

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Bemerkung 6.4: (1) In der einschlägig bekannten Literatur über gewöhnliche Differenzengleichungen (vergleiche hierzu etwa AGARWAL [1], LAKSHMIKANTHAM & TRIGIANTE [32]) steht vielmals der sog. Bernoulli-Shift $f'(t) := f(\rho^+(t)) = f(t + 1)$ im Vordergrund. Wie man schon jetzt erwarten kann, ist diese Konvention für die hier zu entwickelnde verallgemeinerte Differenzial- und Differenzenrechnung ungeeignet.

(2) Wir werden auch mit Funktionen $F : \prod_{k=1}^n \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{X}$ konfrontiert sein, wobei $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_n$ beliebige (nichtleere) Mengen sind und $(\mathbb{T}_k, \preceq_k, \mu_k)$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ eine Maßkette ist. Falls dann $F(t_1, \dots, t_{k-1}, \cdot, t_{k+1}, \dots, t_n) : \mathbb{T}_k \rightarrow \mathcal{X}$ zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{T}_k$ differenzierbar ist, so definieren wir

$$(\Delta_k F)(t_1, \dots, t_{k-1}, t_0, t_{k+1}, \dots, t_n) := (F(t_1, \dots, t_{k-1}, \cdot, t_{k+1}, \dots, t_n))^\Delta(t_0) \in \mathcal{X} \quad (6.2)$$

als die partielle Ableitung von F nach der k -ten Variablen.

Satz 6.5 (elementare Eigenschaften der Ableitung): Es sei $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung. Dann gelten die Aussagen:

- (a) f besitzt in jedem Punkt $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ höchstens eine Ableitung,
- (b) f besitzt in jedem Punkt $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ jedes $x \in \mathcal{X}$ als Ableitung,
- (c) besitzt f in $t_0 \in \mathbb{T}$ eine Ableitung $f^\Delta(t_0)$, so ist f im Punkt t_0 stetig,
- (d) die Abbildungen $\mu(\cdot, \tau), \mu(\tau, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sind für jedes feste $\tau \in \mathbb{T}$ differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{T}$ mit den partiellen Ableitungen

$$(\Delta_1 \mu)(t_0, \tau) = 1, \quad (\Delta_2 \mu)(\tau, t_0) = -1.$$

Bemerkung 6.6: Die exzeptionelle Stellung links-zerstreuter und \mathbb{T} -maximaler Elemente einer Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ wird durch die Aussage (b) von Satz 6.5 begründet.

Beweis: (a) Angenommen, f besitzt in t_0 zwei Ableitungen $x, y \in \mathcal{X}$. Nach Definition von \mathbb{T}^κ enthält jede Umgebung von t_0 ein $t \in \mathbb{T}^\kappa$ mit $t \neq \rho^+(t_0)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $t \neq \rho^+(t_0)$ mit

$$\begin{aligned} \|f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t)x\| &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(\rho^+(t_0), t)|, \\ \|f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t)y\| &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(\rho^+(t_0), t)| \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \|x - y\| |\mu(\rho^+(t_0), t)| &= \|\mu(\rho^+(t_0), t)(x - y)\| \leq \\ &\leq \|\mu(\rho^+(t_0), t)x - (f(\rho^+(t_0)) - f(t))\| + \|f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t)y\| \leq \\ &\leq \varepsilon |\mu(\rho^+(t_0), t)|. \end{aligned}$$

Wegen $\mu(\rho^+(t_0), t) \neq 0$ folgt $\|x - y\| \leq \varepsilon$ und somit $x = y$.

(b) In diesem Fall ist t_0 \mathbb{T} -maximal und links-zerstreut. Somit existiert für jedes $\varepsilon > 0$, jede Abbildung $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ und jedes $x \in \mathcal{X}$ eine Umgebung U (nämlich $U = \{t_0\}$) von $t_0 = \rho^+(t_0)$, so dass für jedes $t \in U$ (also $t = t_0$) gilt $\|f(t_0) - f(t) - \mu(t_0, t)x\| = 0 \leq \varepsilon |\mu(t_0, t)|$.

(c) Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ und U eine \mathbb{T} -kompakte Umgebung von t_0 . Wir definieren

$$M := \max \left\{ \max_{t \in U} |\mu(\rho^+(t_0), t)|, \|f^\Delta(t_0)\| \right\}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung V von t_0 , so dass für alle $t \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t)f^\Delta(t_0)\| &\leq \frac{\varepsilon}{4M} |\mu(\rho^+(t_0), t)|, \\ |\mu(\rho^+(t_0), t) - \mu(\rho^+(t_0), t_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \end{aligned}$$

und für $t \in U \cap V$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t_0)\| &\leq \|f(t) - f(\rho^+(t_0)) + \mu(\rho^+(t_0), t)f^\Delta(t_0) + \\ &\quad + f(\rho^+(t_0)) - f(t_0) - \mu(\rho^+(t_0), t_0)f^\Delta(t_0) + (\mu(\rho^+(t_0), t_0) - \mu(\rho^+(t_0), t)f^\Delta(t_0))\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} (|\mu(\rho^+(t_0), t)| + |\mu(\rho^+(t_0), t_0)|) + \|f^\Delta(t_0)\| |\mu(\rho^+(t_0), t_0) - \mu(\rho^+(t_0), t)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

(d) Die Behauptung resultiert unmittelbar aus der Kozyklus-Eigenschaft von Wachstumseichungen. #

Satz 6.7 (Charakterisierung von Differenzierbarkeit): Es sei $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Abbildung. Dann gelten die Aussagen:

(a) f ist in jedem Punkt $t_0 \in RS(\mathbb{T})$ in dem es stetig ist, auch differenzierbar mit der Ableitung

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\rho^+(t_0)) - f(t_0)}{\mu^*(t_0)}, \quad (6.3)$$

(b) f ist genau dann in einem Punkt $t_0 \in RD(\mathbb{T})$ differenzierbar mit der Ableitung $f^\Delta(t_0) \in \mathcal{X}$, wenn auf einer \mathbb{T} -Umgebung $V \subseteq \mathbb{T}$ von t_0 die Darstellung

$$f(t) = f(t_0) + \mu(t, t_0) [f^\Delta(t_0) + \psi(t, t_0)] \quad \text{für alle } t \in V \quad (6.4)$$

gilt, mit einer Funktion $\psi(\cdot, t_0) : V \rightarrow \mathcal{X}$ und $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t, t_0) = 0$.

Die folgende Bemerkung beleuchtet die Aussage (a) des obigen Satzes.

Bemerkung 6.8: (1) In Aussage (a) kann nicht auf die Stetigkeit von f verzichtet werden, denn etwa im Fall der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ wäre die Körnigkeit μ^* dann in den rechts-zerstreuten Punkten differenzierbar, aber nicht stetig, was dem Satz 6.5(c) widerspräche.

(2) Die Behauptung (c) des Satzes 6.5 verallgemeinert gerade die aus der reellen Analysis bekannte Aussage, dass aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt. Diese Implikation erlaubt im Maßkettenkalkül auch eine Umkehrung, nämlich in Form von Satz 6.7(a).

Beweis: (a) Die Abbildung $g(t) := \frac{f(\rho^+(t_0)) - f(t)}{\mu(\rho^+(t_0), t)}$ ist in einer Umgebung von $t_0 \in RS(\mathbb{T})$ definiert und stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also eine Umgebung U von t_0 , so dass gilt

$$\begin{aligned} & \left\| f(\rho^+(t_0)) - f(t) - \mu(\rho^+(t_0), t) \frac{f(\rho^+(t_0)) - f(t_0)}{\mu^*(t_0)} \right\| = \\ & = \left\| \frac{f(\rho^+(t_0)) - f(t)}{\mu(\rho^+(t_0), t)} - \frac{f(\rho^+(t_0)) - f(t_0)}{\mu(\rho^+(t_0), t_0)} \right\| |\mu(\rho^+(t_0), t)| \leq \\ & \leq \varepsilon |\mu(\rho^+(t_0), t)| \quad \text{für alle } t \in U. \end{aligned}$$

Der explizite Ausdruck für $f^\Delta(t_0) \in \mathcal{X}$ ergibt sich dann wegen der Eindeutigkeit der Ableitung, also aus dem Satz 6.5(a).

(b) Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

(\Rightarrow) Setzt man

$$\psi(t, t_0) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_0) - \mu(t, t_0) f^\Delta(t_0)}{\mu(t, t_0)} & \text{für } t \neq t_0 \\ 0 & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

für Zeitpunkte t aus einer \mathbb{T} -Umgebung V von $t_0 \in RD(\mathbb{T})$, so gilt einerseits die Darstellung (6.4) und andererseits wegen der Differenzierbarkeit von f in t_0 existiert nach Definition 6.1 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine \mathbb{T} -Umgebung U von t_0 mit

$$0 \leq \|\psi(t, t_0)\| = \left\| \frac{f(t) - f(t_0) - f^\Delta(t_0) \mu(t, t_0)}{\mu(t, t_0)} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in U \setminus \{t_0\} \cap V,$$

also $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t, t_0) = 0$.

(\Leftarrow) Aufgrund von $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t, t_0) = 0$ gibt es umgekehrt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine \mathbb{T} -Umgebung U von t_0 mit $\|\psi(t, t_0)\| \leq \varepsilon$ für alle $t \in U$ und folglich

$$\|f(t) - f(t_0) - f^\Delta(t_0) \mu(t, t_0)\| \leq \|\psi(t, t_0)\| |\mu(t, t_0)| \leq \varepsilon |\mu(t, t_0)| \quad \text{für alle } t \in U,$$

womit alles gezeigt ist. #

Beispiel 6.9: Wegen Satz 6.5(e) ist eine Abbildung $f : \mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{X}$ für $\sigma \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$ differenzierbar in jedem Punkt $t_0 \in (\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) \setminus LS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z} + (0, \sigma]_{\mathbb{R}}$. In einem links-dichten Punkt t_0 , d.h. genau für $t_0 \in \mathbb{Z}$, ist f genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ existiert. Die Ableitung lautet dann

$$f^{\Delta}(t_0) = \begin{cases} \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} & \text{für } t_0 \in LS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) \\ \dot{f}(t_0) & \text{für } t_0 \in (\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) \setminus (LS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) \cup RS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}})) \\ \frac{f(t_0+1-\sigma) - f(t_0)}{1-\sigma} & \text{für } t_0 \in RS(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}) \end{cases}$$

Die algebraischen Eigenschaften (Linearität, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) der reellen Differenziation können verallgemeinert werden. Wir stellen daher nun einige Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen zusammen.

Satz 6.10 (Differenziations-Regeln): *Es sei $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ und \mathcal{X} ein Banach-Raum.*

- (a) $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ seien in t_0 differenzierbar. Dann ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ auch die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ in t_0 differenzierbar und es gilt die Summenregel

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)^{\Delta}(t_0) = \alpha f^{\Delta}(t_0) + \beta g^{\Delta}(t_0),}$$

- (b) es seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ Banach-Räume und $\cdot : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}$ eine bilineare stetige Abbildung. Sind dann $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_1$ und $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_2$ im Punkt t_0 differenzierbar, so ist auch die Produktfunktion $f \cdot g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ in t_0 differenzierbar und es gilt die Produktregel

$$\boxed{(f \cdot g)^{\Delta}(t_0) = f(\rho^+(t_0)) \cdot g^{\Delta}(t_0) + f^{\Delta}(t_0) \cdot g(t_0);} \quad (6.5)$$

im Fall $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ und bei symmetrischem $\cdot : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}$ kann man die Produktregel auch in der Form

$$\boxed{(f \cdot g)^{\Delta}(t_0) = g(\rho^+(t_0)) \cdot f^{\Delta}(t_0) + g^{\Delta}(t_0) \cdot f(t_0)} \quad (6.6)$$

angeben,

- (c) es sei \mathcal{B} eine Banach-Algebra mit Einselement $I_{\mathcal{B}}$ und die Abbildungen $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{B}$ algebraisch invertierbar mit $f(t) \cdot g(t) \equiv I_{\mathcal{B}}$. Ist f in t_0 differenzierbar, so auch die Umkehrfunktion g und es gilt die Reziprokenregel

$$\boxed{g^{\Delta}(t_0) = -g(\rho^+(t_0)) \cdot f^{\Delta}(t_0) \cdot g(t_0),}$$

- (d) es seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ Banach-Räume, $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ stetig-differenzierbar und $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_1$ in t_0 differenzierbar. Dann ist auch die Komposition $f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_2$ in t_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$\boxed{(f \circ g)^{\Delta}(t_0) = \left[\int_0^1 (Df)(g(t_0) + h\mu^*(t_0))g^{\Delta}(t_0) dh \right] g^{\Delta}(t_0).}$$

Bemerkung 6.11: (1) Für die Banach-Algebren \mathbb{R} oder \mathbb{C} besitzt die Reziprokenregel die Form

$$\left(\frac{1}{f} \right)^{\Delta}(t_0) = -\frac{f^{\Delta}(t_0)}{f(\rho^+(t_0))f(t_0)},$$

insofern $f(\rho^+(t_0))f(t_0) \neq 0$ erfüllt ist.

(2) Im Fall eines rechts-dichten Punktes t_0 gilt offenbar $\mu^*(t_0) = 0$ und die Kettenregel erhält die erwartete Form $(f \circ g)^{\Delta}(t_0) = (Df)(g(t_0))g^{\Delta}(t_0)$.

(3) Die in der Monographie LAKSHMIKANTHAM, SIVASUNDARAM & KAYMAKÇALAN [34, pp. 17–18, Theorem 1.2.3(iv)] ohne Beweis angegebene Kettenregel ist im Allgemeinen falsch, d.h. sie trifft nur in rechts-dichten Punkten zu.

Beweis: (a) Die Behauptung ergibt sich sofort aus der Definition 6.1 von Differenzierbarkeit.

(b) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und man wähle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, so dass gilt

$$\varepsilon_1 \|f(\rho^+(t_0))\|_{\mathcal{X}_1} + \varepsilon_2 (\|g(t_0)\|_{\mathcal{X}_2} + \varepsilon_3) + \varepsilon_3 \|f^\Delta(t_0)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \varepsilon.$$

Ferner sei U eine Umgebung von t_0 , so dass für alle $t \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))g^\Delta(t_0)\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \varepsilon_1 |\mu(t, \rho^+(t_0))|, \\ \|f(t) - f(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0)\|_{\mathcal{X}_1} &\leq \varepsilon_2 |\mu(t, \rho^+(t_0))|, \\ \|g(t) - g(t_0)\|_{\mathcal{X}_2} &\leq \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Für $t \in U$ gilt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|f(t) \cdot g(t) - f(\rho^+(t_0)) \cdot g(\rho^+(t_0)) - (f(\rho^+(t_0)) \cdot g^\Delta(t_0) + \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0) \cdot g(t_0))\| \leq \\ &\leq \|f(\rho^+(t_0)) \cdot (g(t) - g(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))g^\Delta(t_0)) + \\ &\quad + (f(t) - f(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0)) \cdot (g(t_0) + g(t) - g(t_0)) + \\ &\quad + \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0) \cdot (g(t) - g(t_0))\| \leq \\ &\leq \left[\varepsilon_1 \|f(\rho^+(t_0))\|_{\mathcal{X}_1} + \varepsilon_2 (\|g(t_0)\|_{\mathcal{X}_2} + \varepsilon_3) + \varepsilon_3 \|f^\Delta(t_0)\|_{\mathcal{X}_1} \right] |\mu(t, \rho^+(t_0))| \leq \varepsilon |\mu(t, \rho^+(t_0))| \end{aligned}$$

und die Gültigkeit der Produktregel (6.5) ist bewiesen. Schließlich folgt auch noch (6.6), indem man in Beziehung (6.5) die Funktionen f und g vertauscht und die Symmetrie des Produkts beachtet.

(c) Die Abbildung $i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $i(x) := x^{-1}$ ist innerhalb der multiplikativen Gruppe (\mathcal{B}, \cdot) stetig (vergleiche DIEUDONNÉ [13, p. 316, Beweis von 15.2.4(i)]). Deshalb ist mit f auch g in t_0 stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0$, so dass gilt

$$\|g(\rho^+(t_0))\| \left[\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|g(t_0)\|) + \varepsilon_1 \|f^\Delta(t_0)\| \|g(\rho^+(t_0))\| \right] \leq \varepsilon.$$

Ferner gibt es eine Umgebung U von t_0 , mit der für jedes $t \in U$ gilt

$$\|g(t) - g(t_0)\| \leq \varepsilon_1, \quad \|f(t) - f(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0)\| \leq \varepsilon_2 |\mu(t, \rho^+(t_0))|$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\|g(t) - g(\rho^+(t_0)) + \mu(t, \rho^+(t_0))g(\rho^+(t_0)) \cdot f^\Delta(t_0) \cdot g(t_0)\| = \\ &= \|-g(\rho^+(t_0)) \cdot [(f(t) - f(\rho^+(t_0)) - \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0))g(t) + \\ &\quad + \mu(t, \rho^+(t_0))f^\Delta(t_0) \cdot (g(t) - g(t_0))]\| \leq \\ &\leq \|g(\rho^+(t_0))\| \left[\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|g(t_0)\|) + \varepsilon_1 \|f^\Delta(t_0)\| \right] |\mu(t, \rho^+(t_0))| \leq \varepsilon |\mu(t, \rho^+(t_0))|. \end{aligned}$$

(d) Zum Nachweis der Kettenregel unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $t_0 \in \text{RS}(\mathbb{T})$, d.h. $\mu^*(t_0) > 0$. Dann sind g und $f \circ g$ nach Satz 6.5(e) im Punkt t_0 differenzierbar mit den Ableitungen

$$g^\Delta(t_0) = \frac{g(\rho^+(t_0)) - g(t_0)}{\mu^*(t_0)}, \quad (f \circ g)^\Delta(t_0) = \frac{f(g(\rho^+(t_0))) - f(g(t_0))}{\mu^*(t_0)}. \quad (6.7)$$

Der letztere Quotient lässt sich aufgrund des Mittelwertsatzes (siehe LANG [35, p. 341, Theorem 4.2]) nun wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta(t_0) &= \frac{1}{\mu^*(t_0)} \left[\int_0^1 (Df)(g(t_0) + h(g(\rho^+(t_0)) - g(t_0))) dh \right] [g(\rho^+(t_0)) - g(t_0)] = \\ &\stackrel{(6.7)}{=} \left[\int_0^1 (Df)(g(t_0) + h\mu^*(t_0)g^\Delta(t_0)) dh \right] g^\Delta(t_0). \end{aligned}$$

2. Fall: $t_0 \in RD(\mathbb{T})$, also $\rho^+(t_0) = t_0$. Wir geben ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor und wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ derart klein, dass

$$\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|g^\Delta(t_0)\|) + \varepsilon_1 \|(Df)(g(t_0))\| \leq \varepsilon \quad (6.8)$$

gilt. Da g differenzierbar in t_0 ist, gibt es eine Umgebung U_1 von t_0 mit

$$\|g(t_0) - g(t) - \mu(t_0, t)g^\Delta(t_0)\| \leq \varepsilon_1 |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1,$$

was wegen der Dreiecksungleichung nach unten sofort

$$\|g(t_0) - g(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \|g^\Delta(t_0)\|) |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1 \quad (6.9)$$

impliziert. Auf der anderen Seite besitzt das differenzierbare f die Darstellung

$$f(x+h) - f(x) - (Df)(x)h = \|h\| \psi(h)$$

(vergleiche LANG [35, p. 333]), wobei das Restglied ψ auf einer Nullumgebung in \mathcal{X} definiert ist und die Beziehung $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) = 0$ erfüllt. Insbesondere gilt dann

$$f(g(t)) - f(g(t_0)) - (Df)(g(t_0)) [g(t) - g(t_0)] = \|g(t) - g(t_0)\| \psi(g(t) - g(t_0)) \quad (6.10)$$

und wegen der Stetigkeit von g in t_0 existiert eine Umgebung U_2 von t_0 mit $\|\psi(g(t) - g(t_0))\| \leq \varepsilon_2$ für alle $t \in U_2$. Dies hat nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|f(g(t_0)) - f(g(t)) - (Df)(g(t_0))\mu(t_0, t)g^\Delta(t_0)\| \leq \\ & \leq \|f(g(t_0)) - f(g(t)) - (Df)(g(t_0)) [g(t_0) - g(t)]\| + \\ & \quad + \|(Df)(g(t_0)) [g(t_0) - g(t)] - \mu(t_0, t)(Df)(g(t_0))g^\Delta(t_0)\| \leq \\ & \stackrel{(6.10)}{\leq} \|g(t_0) - g(t)\| \|\psi(g(t_0) - g(t))\| + \\ & \quad + \|(Df)(g(t_0))\| \|g(t_0) - g(t) - \mu(t_0, t)g^\Delta(t_0)\| \leq \\ & \stackrel{(6.9)}{\leq} \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|g^\Delta(t_0)\|) |\mu(t_0, t)| + \varepsilon_1 \|(Df)(g(t_0))\| |\mu(t_0, t)| \leq \\ & \stackrel{(6.8)}{\leq} \varepsilon |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

zur Folge, welche gerade die Behauptung darstellt. Damit ist alles gezeigt. #

Bevor der Differenzialkalkül auf Maßketten weiterentwickelt wird, ist für die Verwendung an späterer Stelle noch ein Hilfsresultat zur Verfügung zu stellen. Dazu sei an den Begriff der Involution erinnert; darunter versteht man eine Selbstabbildung $\cdot^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ einer Banach-Algebra \mathcal{B} (über dem Körper \mathbb{F}) mit Einselement $I_{\mathcal{B}}$ und den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (X+Y)^* &= X^* + Y^*, & (\alpha X)^* &= \bar{\alpha} X^*, \\ (XY)^* &= Y^* X^*, & X^{**} &= X \end{aligned} \quad (6.11)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{F}$ und $X, Y \in \mathcal{B}$, sowie $\|X^*\| = \|X\|$ für alle $X \in \mathcal{B}$ (vergleiche DIEUDONNÉ [13, pp. 302–303, Abschnitt 15.4]). Damit resultiert unmittelbar das folgende

Lemma 6.12: *Ist \mathcal{B} eine Banach-Algebra mit der Involution \cdot^* und ist die Funktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{B}$ differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$, so ist auch $G : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{B}$, $G(t) := F(t)^*$ differenzierbar in t_0 mit der Ableitung*

$$G^\Delta(t_0) = [F^\Delta(t_0)]^*.$$

Beweis: Da Involutionen stetige Isometrien auf \mathcal{B} sind, folgt die Behauptung unmittelbar. #

Der Hauptgegenstand des restlichen Kapitels ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf Maßketten. Bei seiner Formulierung setzen wir die Differenzierbarkeit in etwas abgeschwächter Form voraus. Diese sog. Vordifferenzierbarkeit erweist sich dann als gerade passend, um im Kapitel 7 mittels eines Approximationssatzes einen Integralbegriff einzuführen. Als weiteres Hilfsmittel hierzu beweisen wir noch einen Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Differenziation.

Wie schon beim Zwischenwertsatz 4.8 wird sich beim Mittelwertsatz und seinen Varianten zeigen, dass die in der reellen Analysis gültigen Identitäten im Maßkettenkalkül zu Ungleichungen abgeschwächt werden müssen.

Definition 6.13 ((vor-)differenzierbar, Differenziations-Bereich, Ableitung): Man nennt eine Abbildung $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ vordifferenzierbar (auf \mathbb{T}) mit Differenziations-Bereich $\Omega \subseteq \mathbb{T}$, falls gilt

- (i) $\Omega \subseteq \mathbb{T}^\kappa$, $\mathbb{T}^\kappa \setminus \Omega$ ist abzählbar und $\mathbb{T}^\kappa \setminus \Omega \cap RS(\mathbb{T}) = \emptyset$,
- (ii) f ist stetig auf \mathbb{T} und in jedem $t \in \Omega$ differenzierbar.

Wir bezeichnen f als differenzierbar (auf \mathbb{T}), wenn sie vordifferenzierbar mit $\Omega = \mathbb{T}^\kappa$ ist. Man nennt die Funktion $f^\Delta : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ dann Vor-Ableitung bzw. Ableitung.

Bemerkung 6.14: (1) Etwas prägnanter formuliert, ist die Funktion f genau dann vordifferenzierbar, wenn sie stetig und überall bis auf abzählbar viele rechts-dichte Ausnahmestellen differenzierbar ist.

(2) Vermöge der Rekursionen

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{\kappa^0} &:= \mathbb{T}, & \mathbb{T}^{\kappa^{n+1}} &:= \left(\mathbb{T}^{\kappa^n}\right)^\kappa, \\ f^{\Delta^0} &:= f, & f^{\Delta^{n+1}} &:= \left(f^{\Delta^n}\right)^\Delta, \end{aligned}$$

lassen sich für $n \in \mathbb{N}_0$ auch höhere Ableitungen f^{Δ^n} einer Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ definieren, welche dann allerdings nur auf \mathbb{T}^{κ^n} erklärt sind. Damit kann man etwa einen Satz von Taylor auf Maßketten formulieren (siehe AGARWAL & BOHNER [2, Theorem 1, Theorem 2]).

Beispiel 6.15: (1) In trivialer Weise ist \mathbb{T}^κ ein Differenziations-Bereich. Gleiches gilt auch für \emptyset , falls \mathbb{T}^κ abzählbar ist und keine rechts-zerstreuten Punkte besitzt.

(2) Ist \mathbb{T} ein abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} , so ist eine auf \mathbb{T} differenzierbare Funktion im Inneren von \mathbb{T} differenzierbar und in den zu \mathbb{T} gehörenden Randpunkten von \mathbb{T} einseitig differenzierbar.

(3) Wir betrachten jetzt noch die inhomogene Zeitskala $\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}}$ für ein fixes $\sigma \in (0, 1)_{\mathbb{R}}$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{X}$. Dann ist f vordifferenzierbar mit dem Differenziations-Bereich $\Omega_1 := \mathbb{Z} + (0, \sigma]_{\mathbb{R}}$ (vergleiche Beispiel 6.9). Dagegen ist $\Omega_2 := \mathbb{Z} + [0, \sigma)_{\mathbb{R}}$ kein Differenziations-Bereich, weil $(\mathbb{Z} + [0, \sigma]_{\mathbb{R}})^\kappa \setminus (\mathbb{Z} + [0, \sigma)_{\mathbb{R}})$ aus rechts-zerstreuten Punkten besteht.

Satz 6.16 (Mittelwertsatz): Die beiden Abbildungen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ seien vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω und es gelte $\|f^\Delta(t)\| \leq g^\Delta(t)$ für alle $t \in \Omega$. Dann folgt die Abschätzung

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq g(t_2) - g(t_1) \quad \text{für alle } t_2, t_1 \in \mathbb{T}, t_1 \preceq t_2.$$

Beweis: Es existiert eine surjektive Abbildung $s : \mathbb{N} \rightarrow [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Induktionsprinzip (Satz 4.6) in $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ auf die Aussagen

$$\mathcal{A}(t) : \|f(t) - f(t_1)\| \leq g(t) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(t, t_1) + \sum_{s^{(n)} \prec t} 2^{-n} \right]$$

an. Gilt nämlich

$$\mathcal{A}(t_2) : \|f(t_2) - f(t_1)\| \leq g(t_2) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(t_2, t_1) + \sum_{s^{(n)} \prec t_2} 2^{-n} \right]$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, so folgt daraus die Aussage des Satzes.

zu (i): Die Aussage $\mathcal{A}(t_1)$ ist trivialerweise erfüllt.

zu (ii): Sei $t \in RS(\mathbb{T})$, also $t \in \Omega$. Nach Satz 6.5(e) gelten die Gleichungen

$$f(\rho^+(t)) - f(t) = \mu^*(t)f^\Delta(t), \quad g(\rho^+(t)) - g(t) = \mu^*(t)g^\Delta(t),$$

woraus wegen $\|f^\Delta(t)\| \leq g^\Delta(t)$ folgt $\|f(\rho^+(t)) - f(t)\| \leq g(\rho^+(t)) - g(t)$. Aus $\mathcal{A}(t)$ ergibt sich dann wie folgt $\mathcal{A}(\rho^+(t))$:

$$\begin{aligned} \|f(\rho^+(t)) - f(t_1)\| &\leq \|f(\rho^+(t)) - f(t)\| + \|f(t) - f(t_1)\| \leq \\ &\leq g(\rho^+(t)) - g(t) + g(t) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(t, t_1) + \sum_{s(n) \prec t} 2^{-n} \right] \leq \\ &\leq g(\rho^+(t)) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(\rho^+(t), t) + \sum_{s(n) \prec \rho^+(t)} 2^{-n} \right]. \end{aligned}$$

zu (iii): Es sei $t \in RD(\mathbb{T})$ und nicht maximal, also $\rho^+(t) = t \neq t_2$.

1. Fall: $t \in \Omega \cap [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$. Dann existiert eine Umgebung U von t , so dass für jedes $r \in U$ die Ungleichungen

$$\|f(t) - f(r) - \mu(t, r)f^\Delta(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t, r)|, \quad g(t) - g(r) - \mu(t, r)g^\Delta(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t, r)|$$

gelten, woraus die Abschätzungen

$$\|f(r) - f(t)\| \leq \left(\|f^\Delta(t)\| + \frac{\varepsilon}{2} \right) |\mu(t, r)|, \quad \mu(r, t)g^\Delta(r) \leq g(r) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2} |\mu(r, t)|$$

folgen. Für alle $r \in U$ mit $t \preceq r$ folgt weiter

$$\|f(r) - f(t)\| \leq \mu(r, t) \left(|f^\Delta(t)| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \mu(r, t) \left(g^\Delta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq g(r) - g(t) + \varepsilon \mu(r, t).$$

2. Fall: $t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$. Es existieren eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $t = s(m)$ und eine Umgebung U von t , so dass für $r \in U$ gilt

$$\|f(r) - f(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}, \quad |g(r) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}.$$

Aus der zweiten Ungleichung resultiert $0 \leq g(r) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$ und Addition mit der ersten Ungleichung liefert $\|f(r) - f(t)\| \leq g(r) - g(t) + \varepsilon 2^{-m}$. In beiden Fällen existiert also eine Umgebung U von t , so dass für $r \in U$ mit $t \preceq r$ gilt

$$\|f(r) - f(t)\| \leq g(r) - g(t) + \varepsilon \left(\mu(r, t) + \sum_{t \preceq s(n) \prec r} 2^{-n} \right)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A}(t)$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \|f(r) - f(t_1)\| &\leq \|f(r) - f(t)\| + \|f(t) - f(t_1)\| \leq \\ &\leq g(r) - g(t) + \varepsilon \left[\mu(r, t) + \sum_{t \preceq s(n) \prec r} 2^{-n} \right] + \\ &\quad + g(t) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(r, t_1) + \sum_{s(n) \prec t} 2^{-n} \right] = g(r) - g(t_1) + \varepsilon \left[\mu(r, t_1) + \sum_{s(n) \prec r} 2^{-n} \right], \end{aligned}$$

also $\mathcal{A}(r)$.

zu (iv): Nachdem die nicht-strenge Ungleichung zwischen stetigen Funktionen auf $[r, t]_{\mathbb{T}}$ gilt, erhält man sie auch auf $[r, t]_{\mathbb{T}}$. #

Bemerkung 6.17: (1) In dem obigen Beweis von Satz 6.16 wurden weder die Vollständigkeit von \mathcal{X} noch eine der algebraischen Eigenschaften der Differenziation benutzt.

(2) Dass die Bedingung der Vordifferenzierbarkeit für den Mittelwertsatz gerade passend ist, sieht man wie folgt:

- (i) Wir nehmen an, $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega$ enthält überabzählbar viele rechts-dichte Stellen. Für $\mathbb{T} := \mathbb{R}_0^+$ betrachte man die beiden Abbildungen $f, g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$,

$$f(t) := t, \quad g(t) := \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}} \\ \frac{1}{2} & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1)_{\mathbb{R}} \\ t - \frac{1}{2} & \text{für } t \in \mathbb{R}_1^+ \end{cases}.$$

Mit dem Differenziations-Bereich $\Omega := [0, \frac{1}{3}]_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{R}_3^+$ und $t_1 := 0, t_2 := 4$ gilt

$$0 \leq |f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \cap \Omega,$$

aber $g(4) - g(0) < |f(4) - f(0)|$. Das ist ein Widerspruch.

- (ii) Angenommen, es existiert ein $t^* \in RS(\mathbb{T}) \cap ([t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega)$ und f, g sind stetig in t^* . Wegen Satz 6.5(e) sind f und g dann auch differenzierbar in \mathbb{T} mit den Ableitungen

$$f^\Delta(t^*) = \frac{f(\rho^+(t^*)) - f(t^*)}{\mu^*(t^*)}, \quad g^\Delta(t^*) = \frac{g(\rho^+(t^*)) - g(t^*)}{\mu^*(t^*)}.$$

Für $\mathbb{T} := [0, 1]_{\mathbb{R}} \cup \{2\} \cup \mathbb{R}_3^+$ betrachte man die beiden Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) := t, \quad g(t) := \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, 1]_{\mathbb{R}} \cup \{2\} \\ 1 - t & \text{für } t \in \mathbb{R}_3^+ \end{cases}.$$

Mit dem Differenziations-Bereich $\Omega := [0, 1]_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{R}_3^+$ und $t_1 := 0, t_2 := 4$ gilt

$$0 \leq |f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \cap \Omega,$$

aber $g(4) - g(0) < |f(4) - f(0)|$. Das ist ein Widerspruch.

Korollar 6.18: Es sei $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω . Dann gilt:

- (a) Ist $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ ein kompaktes \mathbb{T} -Intervall, so gilt

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \sup_{\tau \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^{\#} \cap \Omega} \|f^\Delta(\tau)\| |\mu(t_2, t_1)|. \quad (6.12)$$

- (b) im Fall $f^\Delta(t) \equiv 0$ auf Ω ist f konstant.

Beweis: (a) Es sei o.B.d.A. $t_1 \leq t_2$. Man betrachte die rechte Seite in Ungleichung (6.12) als Funktion $g(t) := \sup_{\tau \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^{\#} \cap \Omega} \|f^\Delta(\tau)\| |\mu(t, t_1)|$ und wende den Mittelwertsatz 6.16 an, womit

$$\begin{aligned} \|f(t_2) - f(t_1)\| &\leq g(t_2) - g(t_1) = \sup_{\tau \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^{\#} \cap \Omega} \|f^\Delta(\tau)\| [\mu(t_2, t_1) - \mu(t_1, t_1)] = \\ &= \sup_{\tau \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^{\#} \cap \Omega} \|f^\Delta(\tau)\| \mu(t_2, t_1) \end{aligned}$$

folgt.

- (b) Die Aussage (b) resultiert sofort aus (a). #

Korollar 6.19: Es seien $f_1, f_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ differenzierbar mit $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ und

$$f_1^\Delta(t) \equiv f_2^\Delta(t) \quad \text{auf } \mathbb{T}.$$

Dann gilt $f_1(t) \equiv f_2(t)$ auf ganz \mathbb{T}^κ .

Beweis: Für $f(t) := f_1(t) - f_2(t)$ gilt wegen der Linearität der Differenziation $f^\Delta(t) \equiv 0$ auf \mathbb{T} und nach Korollar 6.18(b) resultiert $f(t) \equiv x_0$ für ein $x_0 \in \mathcal{X}$ und alle $t \in \mathbb{T}$. Insbesondere zum Zeitpunkt t_0 gilt $0 = f_1(t_0) - f_2(t_0) = f(t_0) = x_0$, d.h. $f_1(t) \equiv f_2(t)$. #

Die Abschätzungen des Mittelwertsatzes lassen sich für reellwertige Funktionen f etwas anders fassen.

Satz 6.20 (Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen): Es seien $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω , sowie $t_1, t_2 \in \Omega$ mit $t_1 \preceq t_2$. Dann sind folgende Aussagen erfüllt:

(a) Ist $f^\Delta(t) \leq g^\Delta(t)$ für alle $t \in \Omega$, so folgt

$$\boxed{f(t_2) - f(t_1) \leq g(t_2) - g(t_1)},$$

(b) ist f^Δ auf Ω nach oben durch ein $M \in \mathbb{R}_0^+$ beschränkt, so resultiert

$$\boxed{f(t_2) - f(t_1) \leq M\mu(t_2, t_1)},$$

(c) insbesondere ist f genau dann monoton steigend (fallend), wenn $f^\Delta(t) \geq 0$ ($f^\Delta(t) \leq 0$) für alle $t \in \Omega$ gilt.

Beweis: (a) Man ersetze im Mittelwertsatz 6.16 die Funktion f durch die Null-Abbildung, sowie g durch die Differenz $g - f$ und benutze die Linearität der Differenziation.

(b) Man wende die Aussage (a) auf die Funktion $g(t) := M\mu(t, t_1)$ an.

(c) Die Aussage (c) ist eine unmittelbare Konsequenz von (a). #

Satz 6.21 (Folgen vordifferenzierbarer Funktionen): Die Glieder $f_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω . Ferner existiere zu jedem $t \in \mathbb{T}^\kappa$ eine kompakte Intervall-Umgebung U_t , so dass die Folge der Vor-Ableitungen $(f_n^\Delta)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $U_t \cap \Omega$ gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:

(a) Die Konvergenz von $(f_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ in einem $t_0 \in \mathbb{T}$ impliziert die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge auf jedem U_t ,

(b) $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ist vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω und es gilt

$$f^\Delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\Delta(t) \quad \text{für alle } t \in \Omega.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass in jedem U_t auch $\rho^+(t)$ enthalten ist. In den ersten beiden Schritten zeigen wir die Aussage (a).

(I) Wir wählen ein $t \in \mathbb{T}^\kappa$ und zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf U_t konvergiert, falls $(f_n(\tau))_{n \in \mathbb{N}}$ für ein $\tau \in U_t$ konvergiert. Es existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{s \in U_t \cap \Omega} \|(f_n - f_m)^\Delta(s)\|$ für alle $m, n \geq n_0$ existiert. Für beliebige $r \in U_t$ und $m, n \geq n_0$ gilt nach Korollar 6.18(a)

$$\begin{aligned} \|f_n(r) - f_m(r)\| - \|f_n(\tau) - f_m(\tau)\| &\leq \|(f_n(r) - f_m(r)) - (f_n(\tau) - f_m(\tau))\| \leq \\ &\leq \sup_{s \in U_t \cap \Omega} \|(f_n - f_m)^\Delta(s)\| |\mu(r, \tau)|. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Daraus folgt weiter

$$\|f_n(r) - f_m(r)\| \leq \|f_n(\tau) + f_m(\tau)\| + \sup_{s \in U_t \cap \Omega} \|(f_n - f_m)^\Delta(s)\| |\mu(\max_{\mathbb{T}} U_t, \min_{\mathbb{T}} U_t)|.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung kann unabhängig von $r \in U_t$ für genügend große $m, n \in \mathbb{N}$ klein gemacht werden. Daraus folgt die Behauptung, da \mathcal{X} vollständig ist.

(II) Wir zeigen die Konvergenz von $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$. Dazu wenden wir zuerst das Induktionsprinzip in $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ auf die Aussagen

$$\mathcal{A}(t) : (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}$$

an.

zu (i): Der Induktionsanfang ist erfüllt; $(f_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nach Voraussetzung.

zu (ii): Sei $t \in RS(\mathbb{T})$, also $t \in \Omega$. Mit der Beziehung (6.3) gilt

$$f_n(\rho^+(t)) = f_n(t) + f_n^\Delta(t) \mu^*(t) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Voraussetzung des Satzes konvergiert $(f_n^\Delta(t))_{n \in \mathbb{N}}$. Daher folgt aus $\mathcal{A}(t)$ die Aussage $\mathcal{A}(\rho^+(t))$.

zu (iii) und (iv): Diese Bedingungen können leicht mit Hilfe der Aussage in Schritt (I) gezeigt werden. Für (iv) ist noch zu beachten, dass U_t nach Satz 3.10(b) stets ein s mit $s \prec t$ enthält, falls $t \in LD(\mathbb{T})$ und nicht \mathbb{T} -minimal ist. Es gilt also $\mathcal{A}(t)$ für jedes $t_0 \preceq t$. Für $t \preceq t_0$ kann die Behauptung genauso gezeigt werden. Man wendet das Induktionsprinzip in dualisierter Form in Negativ-Richtung an. Die Rollen von ρ^- und ρ^+ werden dabei vertauscht. Lediglich bei Prüfung der Bedingung (ii) hat die Gleichung (6.3) die duale Form

$$f_n(\rho^-(t)) = f_n(t) - f_n^\Delta(\rho^-(t)) \mu^*(\rho^-(t)).$$

(III) Wir beweisen nun noch die Behauptung (b). f ist als Grenzfunktion einer lokal-gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen wieder stetig. Es sei $g : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ definiert durch $g(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\Delta(s)$. Sei nun $t \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert ein $n_1 \geq n_0$ (vergleiche Schritt (I)), so dass gilt

$$\sup_{s \in U_t \cap \Omega} \|f_n^\Delta(s) - f_m^\Delta(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } m, n \geq n_1.$$

Aufgrund der Ungleichung (6.13) (wir setzen $\rho^+(t)$ für τ) gilt für jedes $r \in U_t$

$$\begin{aligned} \|(f_n(r) - f_m(r)) - (f_n(\rho^+(t)) - f_m(\rho^+(t)))\| &\leq \sup_{s \in U_t \cap \Omega} \|f_n^\Delta(s) - f_m^\Delta(s)\| |\mu(r, \rho^+(t))| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} |\mu(r, \rho^+(t))| \quad \text{für alle } m, n \geq n_1. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$

$$\|(f_n(r) - f(r)) - (f_n(\rho^+(t)) - f(\rho^+(t)))\| \leq \frac{\varepsilon}{3} |\mu(r, \rho^+(t))| \quad \text{für alle } n \geq n_1. \quad (6.14)$$

Weiter gibt es ein $j \geq n_1$ mit

$$\|f_j^\Delta(\rho^+(t)) - g(\rho^+(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.15)$$

Die Funktion f_j ist im Punkt t differenzierbar und folglich existiert eine Umgebung \tilde{U} von t , so dass gilt

$$\|f_j(\rho^+(t)) - f_j(r) - \mu(\rho^+(t), r) f_j^\Delta(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} |\mu(\rho^+(t), r)| \quad \text{für alle } r \in \tilde{U}. \quad (6.16)$$

Insgesamt folgt jetzt für $r \in U_t \cap \tilde{U}$ aus (6.14) (mit j statt n), (6.15) und (6.16) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|f(\rho^+(t)) - f(r) - \mu(\rho^+(t), r) g(t)\| &\leq \|(f(\rho^+(t)) - f(r)) - (f_j(\rho^+(t)) - f_j(r))\| + \\ &\quad + \|f_j(\rho^+(t)) - f_j(r) - \mu(\rho^+(t), r) f_j^\Delta(t)\| + \\ &\quad + \|\mu(\rho^+(t), r) (f_j^\Delta(t) - g(t))\| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\right) |\mu(\rho^+(t), r)| = \varepsilon |\mu(\rho^+(t), r)|, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. #

Beispiel 6.22: Man betrachte die Zeitskala $\mathbb{T} := [-2, 0]_{\mathbb{R}} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $f(t) := |t|$ Grenzfunktion von $f_n(t) = |t - \frac{1}{n}|$. Alle Funktionen f_n sind auf ganz \mathbb{T} differenzierbar, aber f besitzt in 0 keine Ableitung, ist dort also nicht differenzierbar.

Beispiel 6.23: Für die Zeitskala $\mathbb{T} := \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right]_{\mathbb{R}}$ und die Abbildung

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ \frac{1}{2n} & \text{für } t \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right]_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

ergibt sich $f^{\Delta}(0) = 1$.

7 Stammfunktion und Integration

In diesem Kapitel sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette und \mathcal{X} (bis auf weiteres) ein topologischer Raum.

Definition 7.1 (einfache Abbildung): Die Abbildung $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt einfach, falls gilt:

- (i) In jedem rechts-dichten $t \in \mathbb{T}$ existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{s \searrow t} f(s)$,
- (ii) in jedem links-dichten $t \in \mathbb{T}$ existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{s \nearrow t} f(s)$.

Mit $\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ bezeichnen wir die Menge aller einfachen Abbildungen von \mathbb{T} nach \mathcal{X} .

Bemerkung 7.2: (1) Ist \mathcal{X} ein linearer Raum, so auch $\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

(2) Für einen Banach-Raum \mathcal{X} und ein \mathbb{T} -kompaktes Intervall als Definitionsbereich kann man zeigen, dass die Treppenfunktionen $s : [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{X}$ dicht (bezüglich der \mathcal{C}^0 -Topologie) in $\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ liegen (siehe DIEUDONNÉ [12, p. 140, Satz 7.6.1] oder HILGER [20, p. 11, Satz 1.8]). Folglich ist dann auch $\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ ein Banach-Raum.

Definition 7.3 (rd-stetige Abbildung): Die Abbildung $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt rd-stetig, falls gilt:

- (i) In jedem rechts-dichten oder maximalen $t \in \mathbb{T}$ ist f stetig,
- (ii) in jedem links-dichten $t \in \mathbb{T}$ existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{s \nearrow t} f(s)$.

Mit $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ bezeichnen wir die Menge aller rd-stetigen Abbildungen von \mathbb{T} nach \mathcal{X} .

Bemerkung 7.4: Für die soeben eingeführten Funktionenmengen bzw. -räume gelten die Inklusionen

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X}).$$

Nur falls \mathbb{T} zugleich links-dichte und rechts-zerstreute Punkte enthält, ist die linke Inklusion nicht umkehrbar (vergleiche Beispiel 7.6). Auf einer diskreten Maßkette fallen alle drei Räume zusammen. Im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Satz 7.5 (Eigenschaften einfacher und rd-stetiger Funktionen): Es sei die Abbildung $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben. Dann gilt:

- (a) Ist f einfach bzw. rd-stetig, so ist es auch der Bernoulli-Shift $f' := f \circ \rho^+$ (ρ^+ bezeichnet den Sprungoperator),
- (b) sei \mathcal{Y} ein weiterer topologischer Raum und $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ stetig. Ist f einfach bzw. rd-stetig, so ist es auch die Komposition $h \circ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{Y}$,
- (c) sind die Abbildungen $f_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ der lokal gleichmäßig gegen f konvergenten Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfach bzw. rd-stetig, so ist es auch die Grenzfunktion f ,
- (d) ist der Raum \mathcal{X} das kartesische Produkt $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N$ der topologischen Räume $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ und $f = (f_1, \dots, f_N)$, so ist mit jedem f_k ($k \in \{1, \dots, N\}$) auch f einfach bzw. rd-stetig in der Produkttopologie.

Beweis: (a) Es genügt, jeweils die einseitigen Grenzwerte zu betrachten. Sei $t \in \mathbb{T}$ rechts- bzw. links-dicht und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen t konvergente Folge in \mathbb{T} mit $t \prec s_n$ bzw. $s_n \prec t$. Dann ist $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $r_n := \rho^+(s_n)$ eine Folge mit den gleichen Eigenschaften. Es folgt

$$\lim_{s \searrow t} f(\rho^+(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\rho^+(s_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{s \searrow t} f(s).$$

und analog $\lim_{s \nearrow t} f(\rho^+(s)) = \lim_{s \nearrow t} f(s)$. Ist $t \in RD(\mathbb{T})$ und $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$, so folgt weiter

$$\lim_{s \searrow t} f(\rho^+(s)) = \lim_{s \searrow t} f(s) = f(t) = f(\rho^+(t)), \quad \lim_{s \nearrow t} f(\rho^+(s)) = \lim_{s \nearrow t} f(s) = f(t) = f(\rho^+(t)).$$

Für (b), (c) und (d) genügt der Hinweis, dass Grenzwertbildung und die jeweils genannten Operationen (Komposition mit h , Übergang zur Grenzfunktion, Bildung des kartesischen Produkts) vertauschbar sind. #

Beispiel 7.6: Die Körnigkeit $\mu^* = \mu(\rho^+(\cdot), \tau) - \mu(\cdot, \tau) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ist rd-stetig, in links-dichten und rechts-zerstreuten Punkten jedoch nicht stetig (Satz 4.34). Konkret sind bei $\mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ die Punkte der Form $k + \frac{1}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sowohl links-dicht, als auch rechts-zerstreut.

Von nun an sei \mathcal{X} wieder ein Banach-Raum.

Satz 7.7 (Vor-Stammfunktion): Gegeben seien eine einfache Abbildung $f : \mathbb{T}^{\kappa} \rightarrow \mathcal{X}$ und $\tau \in \mathbb{T}$, $\xi \in \mathcal{X}$. Dann existiert genau eine vordifferenzierbare Funktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit Differenziations-Bereich Ω , so dass gilt $F(\tau) = \xi$ und

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \Omega.$$

F wird als Vor-Stammfunktion bezeichnet.

Beweis: (I) Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Korollar 6.18(b).

(II) Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Für $t \in \mathbb{T}_{\tau}^{+}$ zeigen wir induktiv die Aussagen

$$\mathcal{A}(t) : \begin{cases} \text{Es existiert eine vordifferenzierbare Funktion } F_{n,t} : [\tau, t]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{X} \text{ mit} \\ \text{Differenziations-Bereich } \Omega_{n,t} \text{ und den Eigenschaften} \\ \\ F_{n,t}(\tau) = \xi, \\ \|F_{n,t}^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } s \in \Omega_{n,t}. \end{cases} \quad (7.0)$$

zu (i): Wir setzen $\Omega_{n,t} = \emptyset$ und $F_{n,t}(\tau) := \xi$.

zu (ii): Es sei $t \in RS(\mathbb{T})$ und die Funktion $F_{n,t}$ mit Differenziations-Bereich $\Omega_{n,t}$ gegeben. Wir definieren $\Omega_{n,\rho^+(t)} := \Omega_{n,t} \cup \{t\}$ und $F_{n,\rho^+(t)} : [\tau, \rho^+(t)]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{X}$ durch

$$F_{n,\rho^+(t)}(s) := \begin{cases} F_{n,t}(s) & \text{für } s \in [\tau, t]_{\mathbb{T}} \\ F_{n,t}(t) + f(t)\mu^*(t) & \text{für } s = \rho^+(t) \end{cases}.$$

Es gilt dann (vergleiche (6.3)) $\|F_{n,\rho^+(t)}^{\Delta}(s) - f(s)\| = 0$ für $s = t$ und

$$\|F_{n,\rho^+(t)}^{\Delta}(s) - f(s)\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } s \in \Omega_{n,t},$$

insgesamt also $\mathcal{A}(\rho^+(t))$.

zu (iii): Für beliebiges $t \in RD(\mathbb{T})$ seien $\Omega_{n,t}$ und $F_{n,t}$ nach der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A}(T)$ konstruiert. Es existiert eine Umgebung U von t , so das gilt $\|f(r) - \lim_{u \searrow t} f(u)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $r \in U$, $t \prec r$. Für den Zeitpunkt $s \in U$, $t \prec s$ definieren wir die Menge $\Omega_{n,s} := (\Omega_{n,t} \setminus \{t\}) \cup (t, s]_{\mathbb{T}}^{\kappa}$ und die Funktion $F_{n,s} : [\tau, s]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{X}$ durch

$$F_{n,s}(r) := \begin{cases} F_{n,t}(r) & \text{für } r \in [\tau, t]_{\mathbb{T}} \\ F_{n,t}(t) + \lim_{u \searrow t} f(u)\mu(u, t) & \text{für } r \in (t, s]_{\mathbb{T}} \end{cases}.$$

Dann ist $F_{n,s}$ vordifferenzierbar mit $\Omega_{n,s}$, es gilt nach Satz 6.5(c)

$$\|F_{n,s}^{\Delta}(r) - f(r)\| = \left\| \lim_{u \searrow t} f(u) - f(r) \right\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } r \in (t, s]_{\mathbb{T}}^{\kappa}.$$

Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{A}(t)$ ergibt dies $\mathcal{A}(s)$ für $t \prec s$, $s \in U$.

zu (iv): Sei $t \in LD(\mathbb{T})$. Für jedes $s \prec t$ seien $\Omega_{n,s}$ und $F_{n,s}$ konstruiert. Es existiert eine Umgebung U von t , so dass $\|f(r) - \lim_{u \nearrow t} f(u)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $r \in U$, $r \prec t$. Sei $s \in U$, $s \prec t$ fest gewählt. Wir definieren

$$\Omega_{n,t} := \begin{cases} \Omega_{n,s} \cup (s, t)_{\mathbb{T}} & \text{für } s \in RD(\mathbb{T}) \\ \Omega_{n,s} \cup [s, t)_{\mathbb{T}} & \text{für } s \in RS(\mathbb{T}) \end{cases}$$

und $F_{n,t} : [\tau, t]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$F_{n,t}(r) := \begin{cases} F_{n,s}(r) & \text{für } r \in [\tau, s]_{\mathbb{T}} \\ F_{n,s}(t) + \lim_{u \nearrow t} f(u) \mu(z, s) & \text{für } r \in (s, t]_{\mathbb{T}} \end{cases}.$$

Dann ist $F_{n,t}$ vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich $\Omega_{n,t}$ und es gilt

$$\|F_{n,t}^{\Delta}(r) - f(r)\| = \left\| \lim_{u \nearrow t} f(u) - f(r) \right\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{T}_s^+ \cap \Omega_{n,t},$$

insgesamt also $\mathcal{A}(t)$.

(III) Mit Hilfe dualer Überlegungen kann man $\mathcal{A}(t)$ auch für $t \preceq \tau$ zeigen. Insgesamt haben wir dann für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ eine vordifferenzierbare Funktion $F_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit Differenziations-Bereich Ω_n gefunden, so dass gilt $\|F_n^{\Delta}(t) - f(t)\| \leq \frac{1}{n}$ für alle $t \in \Omega_n$.

(IV) Es ist $F_n(\tau) = \xi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Der Satz 6.21 liefert nun eine vordifferenzierbare Funktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit Differenziations-Bereich $\Omega := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ und $f^{\Delta}(t) \equiv f(t)$ auf Ω . Das war zu beweisen. #

Einen Integrations-Begriff wollen wir nicht mittels maßtheoretischer Überlegungen herleiten. Wir folgen der Darstellung in DIEUDONNÉ [12, p. 159-161, Abschnitt 8.7] und führen die Integration als zur Differenziation inverse Operation ein. Das hat den Vorteil, dass sofort ein Integralbegriff für Banach-Raum-wertige Funktionen zur Verfügung steht.

Definition 7.8 (Cauchy-Integral): Gegeben sei die Abbildung $f \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^k, \mathcal{X})$ mit zugehöriger Vor-Stammfunktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$. Dann heißt

$$\int_{t_1}^{t_2} f := \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Delta t := F(t_2) - F(t_1) \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{T}$$

das zu f gehörige Cauchy-Integral von t_1 bis t_2 .

Beispiel 7.9: (1) Wegen Satz 6.5(d) und der Kozyklus-Eigenschaft von μ gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta t = \mu(t_2, t_1).$$

(2) Im Fall der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist jede einfache reellwertige Funktion auch Riemann-integrierbar. Das Riemann-Integral stimmt mit dem Cauchy-Integral überein.

(3) Bei der Zeitskala $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ kann man leicht die Beziehung

$$\int_{t_1}^{t_2} f = \begin{cases} \sum_{t=\frac{t_1}{h}}^{\frac{t_2}{h}-1} f(th) & \text{für } t_2 > t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 = t_2 \\ -\sum_{t=\frac{t_2}{h}}^{\frac{t_1}{h}-1} f(th) & \text{für } t_2 < t_1 \end{cases}$$

nachweisen.

(4) Schließlich erhält man für $\mathbb{T} = \mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ die Integralwerte

$$\int_{t_1}^{t_2} f = \begin{cases} \int_{t_1}^{[t_1]} f(t) dt + \int_{[t_2]}^{t_2} f(t) dt + \sum_{t=[t_1]}^{[t_2]-1} \left(\int_t^{t+\frac{1}{2}} f(t) dt + \frac{1}{2} f(t + \frac{1}{2}) \right) & \text{für } [t_2] - 1 \geq [t_1] \\ \int_{t_1}^{[t_1]} f(t) dt + \int_{[t_2]}^{t_2} f(t) dt - \sum_{t=[t_1]}^{[t_2]-1} \left(\int_t^{t+\frac{1}{2}} f(t) dt + \frac{1}{2} f(t + \frac{1}{2}) \right) & \text{für } [t_2] - 1 < [t_1] \end{cases}.$$

Aus der kontinuierlichen Analysis ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bekannt, welcher gerade besagt, dass die Funktion

$$t \mapsto \int_{\tau}^t f(s) ds \quad (7.1)$$

differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{R}$ mit Ableitung f ist, falls f in t_0 stetig ist. Innerhalb des Maßkettenkalküls ist f höchstens in den rechts-dichten Ausnahmestellen aus $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus \Omega$ nicht differenzierbar. Daher genügt es — wie im folgenden Satz 7.11 auch gezeigt wird —, zur Sicherung der Differenzierbarkeit von (7.1) die Stetigkeit von f nur in diesem Punkte zu fordern: Wir benötigen den Begriff der rd-Stetigkeit.

Definition 7.10 (Stammfunktion): *Es sei $f : \mathbb{T}^{\kappa} \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben. Die Abbildung $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt dann Stammfunktion von f , wenn sie differenzierbar auf \mathbb{T}^{κ} ist und*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^{\kappa}$$

erfüllt.

Satz 7.11 (Existenz von Stammfunktionen): *Ist $\tau \in \mathbb{T}$ und $f : \mathbb{T}^{\kappa} \rightarrow \mathcal{X}$ rd-stetig, so besitzt f die Stammfunktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$,*

$$F(t) := \int_{\tau}^t f.$$

Bemerkung 7.12: Stammfunktionen rd-stetiger Abbildungen besitzen per definitionem wieder eine rd-stetige Ableitung. Allgemein bezeichnen wir deshalb eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{T}^{\kappa} \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Ableitung $f^{\Delta} \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^{\kappa}, \mathcal{X})$ als rd-stetig-differenzierbar und mit $\mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}^{\kappa}, \mathcal{X})$ die Menge aller solchen Abbildungen.

Beweis: Es sei der Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ fest. Aus der Definition 7.8 des Cauchy-Integrals und Satz 7.7 folgt, dass F vordifferenzierbar mit Differenziations-Bereich Ω und $F^{\Delta}(t) = f(t)$ für $t \in \Omega$ ist. Für $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \Omega$ ist $t \in RD(\mathbb{T})$ und wir erhalten $\rho^+(t) = t$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U von t mit

$$\|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } s \in U.$$

Bei festem $\tau \in \mathbb{T}$ ist die Funktion $h(s, t) := F(s) - f(t)\mu(s, \tau)$ partiell vordifferenzierbar nach s mit Differenziations-Bereich Ω und für $s \in U \cap \Omega$ gilt $\|(\Delta_1 h)(s, t)\| = \|f(s) - f(t)\| \leq \varepsilon$. Mittels Korollar 6.18(a) folgt für jedes $r \in U$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(r) - \mu(t, r)f(t)\| &= \|(F(t) - \mu(t, \tau)f(t)) - (F(r) - \mu(r, t)f(t))\| = \|h(t) - h(r)\| \leq \\ &\leq \sup_{s \in U \cap \Omega} \|(\Delta_1 h)(s, t)\| |\mu(t, r)| \leq \varepsilon |\mu(t, r)|. \end{aligned}$$

F besitzt also eine Ableitung im Punkt $t \in \mathbb{T}$. Diese ist nach Satz 6.5(a) eindeutig bestimmt. #

Korollar 7.13: *Für jedes $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$ gilt*

$$\int_t^{\rho^+(t)} f = \mu^*(t)f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}. \quad (7.2)$$

Beweis: Für \mathbb{T} -maximale oder rechts-dichte Zeitpunkte t ist die Behauptung trivial. Ist dagegen die Körnigkeit $\mu^*(t) > 0$ und $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Stammfunktion von f , so erhält man

$$\mu^*(t)f(t) = \mu^*(t)F^\Delta(t) \stackrel{(6.3)}{=} F(\rho^+(t)) - F(t) = \int_t^{\rho^+(t)} f,$$

was gerade die Behauptung darstellt. #

Die verschiedenen Eigenschaften der Differenziation auf Maßketten lassen sich nun auf die Integration übertragen:

Satz 7.14 (Eigenschaften des Cauchy-Integrals): Sind $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ und \mathcal{X} ein Banach-Raum über \mathbb{F} , so gilt:

(a) Die Abbildungen $f, g : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathcal{X}$ seien einfach. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{t_1}^{t_2} f + \beta \int_{t_1}^{t_2} g,$$

(b) es seien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ Banach-Räume und $\cdot : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}$ eine bilineare stetige Abbildung. Sind dann $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_1$ und $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}_2$ differenzierbar mit Ableitungen $f^\Delta \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathcal{X}_1)$ und $g^\Delta \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathcal{X}_2)$, so existieren die angegebenen Integrale und es gilt die Formel für die partielle Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\rho^+(t)) \cdot g^\Delta(t) \Delta t + \int_{t_1}^{t_2} f^\Delta(t) \cdot g(t) \Delta t = f(t_2) \cdot g(t_2) - f(t_1) \cdot g(t_1), \quad (7.3)$$

(c) es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig mit stetig-differenzierbarer Stammfunktion und $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung $g^\Delta \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$. Dann existieren die angegebenen Integrale und es gilt die Integration durch Substitution

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^1 f(g(t) + h\mu^*(t)g^\Delta(t)) dh \right] g^\Delta(t) \Delta t = \int_{g(t_1)}^{g(t_2)} f,$$

(d) für einfache Abbildungen $f : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathcal{X}$ und $g : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ folgt aus $\|f(t)\| \leq g(t)$ für alle $t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^\kappa$ die Abschätzung

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} g$$

und sind f und g sogar rd-stetig, so gilt

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\| \Delta t \leq \int_{t_1}^{t_2} g \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^\kappa} g(t) \mu(t_2, t_1),$$

(e) konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen $f_n : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathcal{X}$ gleichmäßig auf $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ gegen eine einfache Funktion $f : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathcal{X}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} f_n = \int_{t_1}^{t_2} f.$$

Bemerkung 7.15: (1) Im Differenzkalkül, d.h. der Situation einer Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, ist die Beziehung (7.3) auch als Abel'sche Summation bekannt.

(2) Unter der Voraussetzung $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \subseteq RD(\mathbb{T})$, lautet die Formel für die Integration durch Substitution

$$\int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g^\Delta(t) \Delta t = \int_{g(t_1)}^{g(t_2)} f.$$

Beweis: Es ist lediglich die Existenz der Integrale und damit jeweils die Einfachheit der Integranden zu zeigen, welche aber sofort aus Satz 7.5 resultiert. Im einzelnen argumentiert man wie folgt:

(a) Die Linearität des Integrals ist trivial.

(b) Die Abbildung $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$F(s) := f(s) \cdot g(s) - f(t_1) \cdot g(t_1) - \int_{t_1}^s f^\Delta(t) \cdot g(t) \Delta t$$

ist wohldefiniert und differenzierbar. Sie besitzt gemäß Satz 6.10(b) den Integranden des ersten Integrals als Ableitung. Damit existiert auch dieses Integral und die angegebenen Beziehung ist zutreffend.

(c) Die Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ von f ist nach Voraussetzung stetig-differenzierbar und nach der Kettenregel in Satz 6.10(d) gilt

$$(F \circ g)^\Delta(t) = \left[\int_0^1 f(g(t) + h\mu^*(t)g^\Delta(t)) dh \right] g^\Delta(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T},$$

was wiederum

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^1 f(g(t) + h\mu^*(t)g^\Delta(t)) dh \right] g^\Delta(t) \Delta t = (F \circ g)(t_2) - (F \circ g)(t_1) = \int_{g(t_1)}^{g(t_2)} f$$

impliziert.

(d) Es seien F, F_1 und G Stammfunktionen von $f, \|f\|$ und g . Ferner sei $H : [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $H(s) := \sup_{t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^\kappa} g(t)\mu(s, t_1)$. Dann gilt

$$\|F^\Delta(t)\| \leq F_1^\Delta(t) = \|F_1^\Delta(t)\| \leq G^\Delta(t) = |G^\Delta(t)| \leq H^\Delta(t) \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}^\kappa$$

und aus dem Mittelwertsatz 6.16 folgt

$$\|F(t_2) - F(t_1)\| \leq F_1(t_2) - F_1(t_1) \leq \|F_1(t_2) - F_1(t_1)\| \leq G(t_2) - G(t_1) \leq H(t_2) - H(t_1).$$

Hierbei ist die im Satz angegebene Ungleichungskette enthalten.

(e) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{\mu(t_2, t_1)}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}} \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon_1$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt für $n \geq n_0$ mit der Behauptung (c)

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f_n - \int_{t_1}^{t_2} f \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} [f_n(t) - f(t)] \Delta t \right\| \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}} \|f_n(t) - f(t)\| \mu(t_2, t_1) \leq \varepsilon.$$

Damit ist alles gezeigt. #

Die Einführung des Cauchy-Integrals mittels Stammfunktionen gestattet einfache Beweise von aus der reellen Analysis bekannten Resultaten:

Satz 7.16 (von de l'Hospital): Gegeben seien eine nach oben unbeschränkte Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ und die Funktionen $f, g \in \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ mit $g(t) > 0$ für alle hinreichend großen $t \in \mathbb{T}$. Gilt dann

(i) $g^\Delta(t) < 0$ für alle hinreichend großen $t \in \mathbb{T}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, oder

(ii) $g^\Delta(t) > 0$ für alle hinreichend großen $t \in \mathbb{T}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$,

so resultiert die Aussage

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)},$$

vorausgesetzt der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn).

Bemerkung 7.17: Die Regeln von de l'Hospital für reelle Funktionen ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) finden sich in nahezu jedem elementaren Analysis-Lehrbuch, wobei man hier auf die Voraussetzung an das Vorzeichen von $g^\Delta(t)$ verzichten kann. Ihr diskretes Pendant für Folgen ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) wird dagegen etwa in AGARWAL [1, p. 28, Corollary 1.7.8, Theorem 1.7.9] bewiesen. Eine Verallgemeinerung dieser Resultate auf Maßketten präsentiert die Arbeit AGARWAL & BOHNER [2, Theorem 3].

Beweis: Es seien $x := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \in [-\infty, \infty]_{\mathbb{R}}$ und die betrachteten Zeitpunkte stets so gewählt, dass die angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind. Wir gehen weiter in drei Schritten vor:

(I) Im Fall $x \in [-\infty, \infty]_{\mathbb{R}}$ und $x < x_1^+ < x_2^+$ existiert ein $T_1 \in \mathbb{T}$ mit $\frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} < x_1^+$ für alle $t \in \mathbb{T}_{T_1}^+$ und unter der Voraussetzung (i) impliziert dies $f^\Delta(t) > x_1^+ g^\Delta(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}_{T_1}^+$, was nach Integration über das \mathbb{T} -Intervall $[t_0, t]_{\mathbb{T}}$ mit $T_1 \preceq t_0 \prec t$ nach Satz 7.14(d) $f(t) - f(t_0) > x_1^+ [g(t) - g(t_0)]$ für alle $T_1 \preceq t_0 \prec t$ impliziert. Nun fällt die Funktion g wegen Satz 6.20(c) streng monoton und aufgrund der Beziehung $g(t) - g(t_0) < 0$ erhält man

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} < x_1^+ \quad \text{für alle } T_1 \preceq t_0 \prec t, \quad (7.4)$$

was wiederum nach Voraussetzung (i)

$$\frac{f(t_0)}{g(t_0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} \leq x_1^+ \quad \text{für alle } t_0 \in \mathbb{T}_{T_1}^+ \quad (7.5)$$

zur Folge hat. Vollkommen analog lässt sich die Beziehung 7.4 auch unter der Voraussetzung (ii) herleiten. Allerdings wächst g nach Satz 6.20(c) dann streng monoton und es ist $g(t) - g(t_0) > 0$, womit $\frac{g(t) - g(t_0)}{g(t)} > 0$ und somit aus (7.4)

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} \frac{g(t) - g(t_0)}{g(t)} < x_1^+ \left(1 - \frac{g(t_0)}{g(t)}\right) \quad \text{für alle } T_1 \preceq t_0 \prec t$$

resultiert. Dies ist aber wiederum äquivalent zu

$$\frac{f(t)}{g(t)} < x_1^+ \left(1 - \frac{g(t_0)}{g(t)}\right) + \frac{f(t_0)}{g(t)} \quad \text{für alle } T_1 \preceq t_0 \prec t$$

und wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ gibt es dann ein $T_2 \in \mathbb{T}_{T_1}^+$ mit

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq x_1^+ \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}_{T_2}^+. \quad (7.6)$$

Unabhängig davon, ob die Voraussetzung (i) oder (ii) erfüllt ist, gilt nach (7.5) und (7.6) also

$$\frac{f(t)}{g(t)} < x_2^+ \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}_{T_2}^+. \quad (7.7)$$

(II) Entsprechend zum ersten Beweisschritt zeigt man im Fall $x \in (-\infty, \infty]_{\mathbb{R}}$ und $x_2^- < x$ die Existenz eines $T_3 \in \mathbb{T}$ mit

$$x_2^- < \frac{f(t)}{g(t)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}_{T_3}^+. \quad (7.8)$$

(III) Ist schließlich $x = -\infty$, so folgt aus (7.7) die Grenzwertbeziehung $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = -\infty$ und für $x = \infty$ ergibt sich aus (7.8) entsprechend $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \infty$. Existiert der Grenzwert x eigentlich, so setzen wir zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einfach $x_2^- := x - \varepsilon$ und $x_2^+ := x + \varepsilon$ und erhalten

$$x - \varepsilon \stackrel{(7.8)}{<} \frac{f(t)}{g(t)} \stackrel{(7.7)}{<} x + \varepsilon \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}_{\max_{\mathbb{T}}\{T_2, T_3\}}^+$$

womit $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = x$ folgt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. #

Eine nicht unbedeutende Rolle werden auch Integrale spielen, die von Parametern abhängen.

Satz 7.18 (Parameterintegrale): *Es seien $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, \mathcal{P} ein topologischer Raum und die Abbildung $f : \mathbb{T}^\kappa \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ stetig. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$,

$$F(p) := \int_{t_1}^{t_2} f(s, p) \Delta s$$

ist stetig,

(b) ist f zusätzlich lokal beschränkt, so ist $G : \mathbb{T} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$

$$G(t, p) := \int_{t_1}^t f(s, p) \Delta s$$

beschränkt.

Beweis: (a) Ein $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. O.B.d.A. betrachten wir nur den Fall $t_1 \prec t_2$. Es sei $p_0 \in \mathcal{P}$ fest. Zu jedem $s \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ existieren eine offene Umgebung U_s von s und V_s von p_0 , so dass

$$\|f(r, p) - f(s, p_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \mu(t_2, t_1) \quad \text{für alle } (r, p) \in U_s \times V_s.$$

Wir wählen eine endliche offene Überdeckung $\{U_{s_k}\}_{k=1, \dots, n}$ des \mathbb{T} -Intervalls $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ und definieren die Menge $V := \bigcap_{k=1}^n V_{s_k}$. Zu jedem beliebigem $s \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ existiert ein Index $i_s \in \{1, \dots, n\}$ mit $s \in U_{s_{i_s}}$. Es gilt also für jedes $s \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ und $p \in V$

$$\begin{aligned} \|f(s, p) - f(s, p_0)\| &\leq \|f(s, p) - f(s_{i_s}, p_0)\| + \|f(s_{i_s}, p_0) - f(s, p_0)\| \leq \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{4} \mu(t_2, t_1) = \frac{\varepsilon}{2} \mu(t_2, t_1). \end{aligned}$$

Mit Satz 7.14(d) folgt weiter für $p \in V$

$$\|F(p) - F(p_0)\| = \left\| \int_{t_1}^t (f(s, p) - f(s, p_0)) \Delta s \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Es sei $(t_0, p_0) \in \mathbb{T} \times \mathcal{P}$. Da f lokal beschränkt ist, existiert eine Konstante $M > 0$ und eine Umgebung W des Punktes (t_0, p_0) mit $\|f(s, p)\| \leq M$ für alle $(s, p) \in W$. Es sei V die in Beweisschritt (a) für (t_0, p_0) definierte Menge. Für alle Paare (t, p) aus der offenen Umgebung $W \cap B_{\frac{\varepsilon}{2M}}(t_1) \times V$ von (t_0, p_0) gilt dann

$$\begin{aligned} \|G(t, p) - G(t_0, p_0)\| &= \left\| \int_{t_1}^t f(s, p) \Delta s - \int_{t_1}^{t_0} f(s, p_0) \Delta s \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{t_1}^t f(s, p) \Delta s \right\| + \left\| \int_{t_1}^{t_0} f(s, p_0) \Delta s \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und damit die Behauptung (b). #

Satz 7.19 (in \mathcal{P} differenzierbare Parameterintegrale): *Es seien $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, \mathcal{P} ein Banach-Raum und die Abbildung $f : \mathbb{T}^\kappa \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ sei stetig und nach der zweiten Variablen m -mal stetig-partiell differenzierbar ($m \in \mathbb{N}_0$). Dann ist auch die Funktion $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$,*

$$F(p) := \int_{t_1}^{t_2} f(s, p) \Delta s$$

m -mal stetig-differenzierbar mit den Ableitungen

$$(D^k F)(p) = \int_{t_1}^{t_2} (D_2^k f)(s, p) \Delta s \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, m\}. \quad (7.9)$$

Beweis: Ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Wir untersuchen zunächst den Fall $m = 1$, denn für $m = 0$ liefert der Satz 7.18(a) die Behauptung. Dazu seien o.E. $t_1 < t_2$ und $p_0 \in \mathcal{P}$ fest gewählt. Zu jedem $s \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ existieren dann offene Umgebungen $U_s \subseteq \mathbb{T}$ von s und $V_s \subseteq \mathcal{P}$ von p_0 , so dass

$$\|(D_2f)(t, p) - (D_2f)(s, p_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4\mu(t_2, t_1)} \quad \text{für alle } (t, p) \in U_s \times V_s. \quad (7.10)$$

Wir wählen nun eine endliche offene Überdeckung $\{U_{s_k}\}_{k=1, \dots, n}$ des kompakten \mathbb{T} -Intervalls $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ und erhalten in $V := \bigcap_{k=1}^n V_{s_k}$ eine offene Umgebung des Punktes p_0 ; gegebenenfalls verkleinern wir V noch, um eine konvexe Umgebung zu erhalten. Zu obigem $s \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ existiert dann ein Index $i_s \in \{1, \dots, n\}$ mit $s \in U_{s_{i_s}}$ und es gilt folglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(D_2f)(s, p) - (D_2f)(s, p_0)\| &\leq \|(D_2f)(s, p) - (D_2f)(s_{i_s}, p_0)\| + \|(D_2f)(s_{i_s}, p_0) - (D_2f)(s, p_0)\| \leq \\ &\stackrel{(7.10)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2\mu(t_2, t_1)} \quad \text{für alle } (s, p) \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}} \times V. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Für derart kleine Vektoren $h \in \mathcal{P}$, dass $p_0 + h \in V$ ist, erhält man nun aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

$$\begin{aligned} &\left\| F(p_0 + h) - F(p_0) - \left[\int_{t_1}^{t_2} (D_2f)(s, p_0) \Delta s \right] h \right\| = \\ &\stackrel{(7.9)}{=} \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, p_0 + h) - f(s, p_0) - (D_2f)(s, p_0)h \Delta s \right\| = \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [(D_2f)(s, p_0 + th) - (D_2f)(s, p_0)] dt \Delta s h \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \|(D_2f)(s, p_0 + th) - (D_2f)(s, p_0)\| dt \Delta s \|h\|_{\mathcal{P}} \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2\mu(t_2, t_1)} dt \Delta s \|h\|_{\mathcal{P}} \stackrel{(7.11)}{=} \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion F differenzierbar auf \mathcal{P} mit der angegebenen Ableitung, da $p_0 \in \mathcal{P}$ beliebig war. Die Funktion

$$(DF)(p) = \int_{t_1}^{t_2} (D_2f)(s, p) \Delta s$$

ist aber auch stetig, wie wiederum aus Satz 7.18(a) resultiert. Zum Nachweis höherer stetiger Differenzierbarkeit als $m = 1$, geht man induktiv vor, indem man das bereits Bewiesene auf die Abbildung $DF : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})$ anwendet. #

Satz 7.20 (in \mathbb{T} differenzierbare Parameterintegrale): Gegeben seien Banach-Räume $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, eine bilineare stetige Abbildung $\cdot : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}$, $t_1 \in \mathbb{T}^{\kappa}$, $t_2 \in \mathbb{T}$, $b \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X}_2)$ und eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^{\kappa} \rightarrow \mathcal{X}_1$, deren partielle Ableitung

$$(\Delta_1 \Phi)(\tilde{t}, s) = \lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \frac{\Phi(t, s) - \Phi(\tilde{t}, s)}{\mu(t, \tilde{t})} \quad \text{für alle } \tilde{t} \in RD(\mathbb{T})$$

gleichmäßig bezüglich s aus kompakten Teilmengen von \mathbb{T}^{κ} existiert. Dann gelten in jedem $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ die Aussagen:

(a) Die Funktion $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, $F(t) := \int_{t_1}^t \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$$F^{\Delta}(t_0) = \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_1}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s,$$

(b) die Funktion $G: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$, $G(t) := \int_t^{t_2} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$$G^\Delta(t_0) = -\Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s.$$

Bemerkung 7.21: Die Aussage (a) gilt auch für Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{T}_{t_1}^+$, falls Φ nur auf der Menge $\{(t, s) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}^\kappa : s \preceq t\}$ definiert ist.

Beweis: (a) Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$.

1. Fall: $t_0 \in RS(\mathbb{T})$. Dann ist F stetig und nach Satz 6.7(a) auch differenzierbar in t_0 mit der Ableitung

$$\begin{aligned} F^\Delta(t_0) &= \frac{1}{\mu^*(t_0)} \left[\int_{t_1}^{\rho^+(t_0)} \Phi(\rho^+(t_0), s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{t_1}^{t_0} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right] = \\ &= \frac{1}{\mu^*(t_0)} \left[\int_{t_0}^{\rho^+(t_0)} \Phi(\rho^+(t_0), s) \cdot b(s) \Delta s + \int_{t_1}^{t_0} [\Phi(\rho^+(t_0), s) - \Phi(t_0, s)] \cdot b(s) \Delta s \right] = \\ &\stackrel{(7.2)}{=} \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_1}^{t_0} \frac{\Phi(\rho^+(t_0), s) - \Phi(t_0, s)}{\mu^*(t_0)} \cdot b(s) \Delta s = \\ &\stackrel{(6.3)}{=} \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_1}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s. \end{aligned}$$

2. Fall: $t_0 \in RD(\mathbb{T})$. Es sei nun o.E. $t_1 \preceq t_0$, $\varepsilon > 0$ beliebig und U_1 eine \mathbb{T} -Umgebung von t_0 mit

$$\|\Phi(t, s) \cdot b(s) - \Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } s, t \in U_1,$$

woraus die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t_0} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0) \right\| &= \left\| \int_t^{t_0} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0) \Delta s \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_t^{t_0} \|\Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0)\| \Delta s \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1 \end{aligned} \quad (7.12)$$

resultiert. Mit einer kompakten Obermenge $K \subseteq \mathbb{T}$ von $[t_1, t_0]_{\mathbb{T}}$ existiert nach Voraussetzung dann eine weitere \mathbb{T} -Umgebung U_2 von t_0 mit

$$\|\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s) - \mu(t_0, t)(\Delta_1 \Phi)(t_0, s)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \frac{\varepsilon}{2C} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_2, s \in K$$

wobei $C := \sup_{t \in K} \left| \int_{t_1}^t \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s \right|$, und folglich

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t_1}^{t_0} [\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s)] \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{t_1}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_0} \|\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s) - \mu(t_0, t)(\Delta_1 \Phi)(t_0, s)\|_{\mathcal{X}_1} \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s \right| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2C} \left| \int_{t_1}^{t_0} \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s \right| |\mu(t_0, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_2. \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left\| F(t_0) - F(t) - \mu(t_0, t) \left(\Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_1}^t (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right) \right\| \leq \\
& \leq \left\| \int_{t_1}^{t_0} [\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s)] \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{t_1}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| + \\
& + \left\| \int_t^{t_0} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \Phi(t_0, t_0) \cdot b(t_0) \right\| \leq \\
& \stackrel{(7.12)}{\leq} \varepsilon |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1 \cap U_2,
\end{aligned}$$

welche gerade die Behauptung (a) darstellt.

(b) Man beachte $\int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s = - \int_{t_2}^{t_0} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s$ und wende die Behauptung (a) mit der Abbildung $-b$ statt b an. #

Satz 7.22 (uneigentliche Parameterintegrale): Gegeben seien Banach-Räume $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, eine bilineare stetige Abbildung $\cdot : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}$, ein \mathbb{T} -Intervall J , eine stetige Funktion $\Phi : J \times J^\kappa \rightarrow \mathcal{X}_1$, $b \in \mathcal{C}_{rd}(J, \mathcal{X}_2)$ und des Weiteren gelte:

- (i) Für beliebiges $t \in J$ ist $\Phi(t, \cdot)b(\cdot) : J^\kappa \rightarrow \mathcal{X}_1$ uneigentlich integrierbar auf J ,
- (ii) es existiere die partielle Ableitung

$$(\Delta_1 \Phi)(\tilde{t}, s) = \lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \frac{\Phi(t, s) - \Phi(\tilde{t}, s)}{\mu(t, \tilde{t})} \quad \text{für alle } \tilde{t} \in RD(J)$$

gleichmäßig bezüglich s aus kompakten Teilmengen von J^κ ,

- (iii) es gibt eine lokal beschränkte Funktion $c : RS(J) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und eine auf J uneigentlich integrierbare Funktion $m : J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, so dass

$$\|(\Delta_1 \Phi)(t, s) \cdot b(s)\| \leq c(t)m(s) \quad \text{für alle } t \in RS(J), s \in J^\kappa.$$

Dann gelten in jedem $t_0 \in J^\kappa$ die Aussagen:

- (a) Ist J unbeschränkt nach links, so ist die Funktion $F : J \rightarrow \mathcal{X}$, $F(t) := \int_{-\infty}^t \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s$ differenzierbar mit der Ableitung

$$F^\Delta(t_0) = \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s,$$

- (b) ist J unbeschränkt nach rechts, so ist die Funktion $G : J \rightarrow \mathcal{X}$, $G(t) := \int_t^\infty \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$$G^\Delta(t_0) = -\Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{t_0}^\infty (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s.$$

Beweis: (a) Wir unterscheiden zwei Fälle bezüglich $t_0 \in J$.

1. Fall: $t_0 \in RS(\mathbb{T})$. Dann ist F stetig und nach Satz 6.7(a) auch differenzierbar in t_0 mit der Ableitung

$$\begin{aligned}
F^\Delta(t_0) &= \frac{1}{\mu^*(t_0)} \left[\int_{-\infty}^{\rho^+(t_0)} \Phi(\rho^+(t_0), s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right] = \\
&= \frac{1}{\mu^*(t_0)} \left[\int_{t_0}^{\rho^+(t_0)} \Phi(\rho^+(t_0), s) \cdot b(s) \Delta s + \int_{-\infty}^{t_0} [\Phi(\rho^+(t_0), s) - \Phi(t_0, s)] \cdot b(s) \Delta s \right] = \\
&\stackrel{(7.2)}{=} \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{\Phi(\rho^+(t_0), s) - \Phi(t_0, s)}{\mu^*(t_0)} \cdot b(s) \Delta s = \\
&\stackrel{(6.3)}{=} \Phi(\rho^+(t_0), t_0) \cdot b(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s.
\end{aligned}$$

2. Fall: $t_0 \in RD(\mathbb{T})$. Mit einem beliebigen $t_1 \prec t_0$ gilt die Darstellung $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ für die beiden Summanden

$$F_1(t) := \int_{-\infty}^{t_1} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s, \quad F_2(t) := \int_{t_1}^t \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s$$

und nach Satz 6.10(a) zusammen mit Satz 7.20(a) ist nur noch zu zeigen, dass F_1 differenzierbar in t_0 mit der Ableitung

$$F_1^\Delta(t_0) = \int_{-\infty}^{t_1} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s$$

ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Weil die Funktion c lokal beschränkt ist, existieren eine Konstante $C_1 \geq 0$ und eine \mathbb{T} -Umgebung U_1 von t_0 mit

$$\|(\Delta_1 \Phi)(t, s) \cdot b(s)\| \leq C_1 m(s) \quad \text{für alle } t \in U_1, s \in J^\kappa$$

und nach dem Korollar 6.18(a) zum Mittelwertsatz folgt

$$\|[\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s)] \cdot b(s)\| \leq C_1 m(s) |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1, s \in J^\kappa. \quad (7.13)$$

Da die Funktion $m : J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uneigentlich integrierbar ist, existiert ein Zeitpunkt $t_2 = t_2(\varepsilon) \prec t_1$, so dass $\int_{-\infty}^{t_2} m(s) \Delta s \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$. Es resultiert damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{t_2} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{-\infty}^{t_2} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{-\infty}^{t_2} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{t_2} \|[\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s)] \cdot b(s)\| \Delta s + |\mu(t_0, t)| \int_{-\infty}^{t_2} \|(\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s)\| \Delta s \leq \\ & \stackrel{(7.13)}{\leq} 2C_1 \int_{-\infty}^{t_2} m(s) \Delta s |\mu(t_0, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Mit einer kompakten Obermenge $K \subseteq J$ von $[t_2, t_1]_{\mathbb{T}}$ existiert nach Voraussetzung (ii) dann eine weitere \mathbb{T} -Umgebung U_2 von t_0 mit

$$\|\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s) - \mu(t_0, t)(\Delta_1 \Phi)(t_0, s)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \frac{\varepsilon}{2C_2} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_2, s \in K$$

wobei $C_2 = C_2(\varepsilon) := \int_{t_1}^t \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s$. Wir erhalten daraus nun

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{t_1}^{t_0} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| \leq \\ & \leq \int_{t_2}^{t_1} \|\Phi(t_0, s) - \Phi(t, s) - \mu(t_0, t)(\Delta_1 \Phi)(t_0, s)\|_{\mathcal{X}_1} \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2C_2} \int_{t_2}^{t_1} \|b(s)\|_{\mathcal{X}_2} \Delta s |\mu(t_0, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_2, \end{aligned}$$

was jetzt aber in Form der Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left\| F_1(t_0) - F_1(t) - \mu(t_0, t) \int_{-\infty}^{t_1} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_{-\infty}^{t_2} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{-\infty}^{t_2} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{-\infty}^{t_2} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| + \\ & \quad + \left\| \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s - \int_{t_2}^{t_1} \Phi(t, s) \cdot b(s) \Delta s - \mu(t_0, t) \int_{t_2}^{t_1} (\Delta_1 \Phi)(t_0, s) \cdot b(s) \Delta s \right\| \leq \\ & \stackrel{(7.14)}{\leq} \varepsilon |\mu(t_0, t)| \quad \text{für alle } t \in U_1 \cap U_2, \end{aligned}$$

gerade die Behauptung (a) impliziert.

(b) Der Nachweis der Behauptung (b) erfolgt mit analogen Schlüssen und dem Satz 7.20(b). #

8 Die Exponentialfunktion

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen algebraischer Natur. Dabei werden einige technische Notationen über komplexe Zahlen und Abbildungen eingeführt.

Lemma 8.1 (die Gruppen \mathbb{C}_h und \mathbb{R}_h): Es seien $h \in \mathbb{R}_0^+$ und

$$\mathbb{C}_h := \{z \in \mathbb{C} : 1 + hz \neq 0\}, \quad \mathbb{R}_h := \{z \in \mathbb{R} : 1 + hz > 0\} \subseteq \mathbb{C}_h;$$

dann gilt:

(a) Durch die Addition

$$z_1 \oplus_h z_2 := z_1 + z_2 + hz_1z_2$$

wird eine Abel'sche (additive) Gruppe (\mathbb{C}_h, \oplus_h) mit dem neutralen Element $0 \in \mathbb{C}$ und dem zu $z \in \mathbb{C}_h$ inversen Element $\ominus_h z := -\frac{z}{1+hz}$ definiert,

(b) (\mathbb{R}_h, \oplus_h) ist eine Untergruppe von (\mathbb{C}_h, \oplus_h) .

Bemerkung 8.2: (1) Die Differenz zweier beliebiger Elemente z_1, z_2 der Gruppe (\mathbb{C}_h, \oplus_h) lautet

$$z_1 \ominus_h z_2 = \frac{z_1 - z_2}{1 + hz_2}.$$

(2) Im Fall $h = 0$ gilt offenbar $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$ und andernfalls ist \mathbb{C}_h die komplexe Zahlenebene ohne den isolierten Punkt $-\frac{1}{h}$, weshalb \mathbb{C}_h auch verallgemeinerte komplexe Ebene heißt. Bettet man \mathbb{R} in die komplexe Zahlenebene ein, so ist \mathbb{R}_0 gerade die reelle Achse und für $h > 0$ ist $\mathbb{R}_h = (-\frac{1}{h}, \infty)_{\mathbb{R}}$ die im Punkt $-\frac{1}{h}$ startende und rechts davon verlaufende horizontale Halbgerade; man bezeichnet \mathbb{R}_h daher als verallgemeinerte reelle Achse.

Beweis: (a) Wir zeigen nur die Abgeschlossenheit von \mathbb{C}_h bezüglich \oplus_h . Für komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_h$ gilt nämlich

$$1 + h(z_1 \oplus_h z_2) = 1 + h(z_1 + z_2 + hz_1z_2) = \underbrace{(1 + hz_1)}_{\neq 0} \underbrace{(1 + hz_2)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Der Rest des Beweises erfolgt durch einfaches Nachrechnen der Gruppenaxiome.

(b) Man gehe analog zu (a) vor. #

Für die wiederholte Addition in \mathbb{C}_h bzw. in \mathbb{R}_h definieren wir induktiv

$$0 \odot_h z := 0, \quad (n+1) \odot_h z := z \oplus_h (n \odot_h z), \quad (-n) \odot_h z := \ominus_h (n \odot_h z) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und $z \in \mathbb{C}_h$ und gelangen zur folgenden Formel für das Produkt in \mathbb{C}_h mit ganzen Zahlen:

Lemma 8.3: Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{R}_0^+$ und $z \in \mathbb{C}_h$ gilt

$$n \odot_h z = \lim_{t \searrow h} \frac{(1 + tz)^n - 1}{t}. \quad (8.1)$$

Bemerkung 8.4: Man beachte, dass der Limes in Beziehung (8.1) auch für $h = 0$ existiert und wie zu erwarten $n \odot_0 z = nz$ gilt.

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{Z}$ ausgehend von $n = 0$ in beide Richtungen, d.h. für $n < 0$ und $n > 0$. #

Definition 8.5 (verallgemeinerte Real- und Imaginärteil-Projektion): Für eine beliebige reelle Konstante $h \in \mathbb{R}_0^+$ definieren wir die Menge

$$\mathbb{S}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{t \searrow h} \frac{|1+tz| - 1}{t} = 0 \right\} \subseteq \mathbb{C}_h,$$

sowie die beiden Abbildungen $\Re_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{R}_h$, $\Im_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{S}_h$ durch

$$\Re_h(z) := \lim_{t \searrow h} \frac{|1+tz| - 1}{t}, \quad \Im_h(z) := \lim_{t \searrow h} \frac{(1+tz)^\diamond - 1}{t},$$

mit $z^\diamond := \frac{z}{|z|}$ für $z \neq 0$. Sie heißen verallgemeinerte Realteil- und Imaginärteil-Projektion.

Bemerkung 8.6: (1) Die Funktionen $\Re_{(\cdot)}(z), \Im_{(\cdot)}(z) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ sind für festes $z \in \mathbb{C}_h$ (für alle $h > 0$) stetig in $h = 0$, denn es gilt (etwa vermöge der Regeln von de l'Hospital)

$$\lim_{h \searrow 0} \Re_h(z) = \Re(z), \quad \lim_{h \searrow 0} \Im_h(z) = \Im(z).$$

Ferner erhält man für jedes $z \in \mathbb{C}_h$ die Zerlegung $\Re_h(z) \oplus_h \Im_h(z) = z$.

(2) Man kann die verallgemeinerte Real- und Imaginärteil-Projektion für $h > 0$ auch geometrisch in der komplexen Ebene interpretieren. Zunächst ist \mathbb{S}_h der Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{1}{h}$ und Radius $\frac{1}{h}$.

- $\Re_h(z)$ ist die Projektion des Punktes $z \in \mathbb{C}_h$ längs des Kreises \mathbb{S}_h auf die Halbgerade von $-\frac{1}{h}$ durch den Nullpunkt 0.
- $\Im_h(z)$ ist die Projektion von $z \in \mathbb{C}_h$ längs der Halbgeraden von $-\frac{1}{h}$ durch z auf den Kreis \mathbb{S}_h .

Im Grenzwert $h \searrow 0$ geht der Kreis \mathbb{S}_h in die imaginäre Achse über und wird deshalb auch als verallgemeinerte imaginäre Achse bezeichnet.

Wir definieren nun eine konformale Transformation $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\xi_h(z) := \lim_{t \searrow h} \frac{\ln(1+tz)}{t} \quad (8.2)$$

wobei \ln den Hauptzweig der komplexen Logarithmus-Funktion $\ln(z) := \ln|z| + i \arg(z)$ mit Wertebereich $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in [-\pi, \pi)_{\mathbb{R}}\}$ bezeichnet. Man beachte, dass im Sinne der kompakten Konvergenz die Grenzwertbeziehung $\lim_{h \searrow 0} \xi_h = \xi_0 = I_{\mathbb{C}}$ gilt. Die geometrische Wirkung der Abbildung ξ_h lässt sich wie folgt beschreiben:

- Im Punkt $-\frac{1}{h}$ startende Halbgeraden werden auf horizontale Geraden in \mathbb{C} abgebildet,
- Kreise um $-\frac{1}{h}$ werden auf vertikale Geraden in \mathbb{C} abgebildet.
- Insbesondere ist das ξ_h -Bild der Halbgerade \mathbb{R}_h die reelle Achse und das Bild des Kreises \mathbb{S}_h die imaginäre Achse.

Speziell im Fall $h = 1$ bildet ξ_h das Innere der nach links verschobenen Einheitskugel $B_1(-1) \subseteq \mathbb{C}$ auf die linke Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$ ab.

Restringiert man das Bild von ξ_h auf den horizontalen Streifen $S_h := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})_{\mathbb{R}}\}$, so kann man die zu $\xi_h : \mathbb{C}_h \rightarrow S_h$ inverse Abbildung $\vartheta_h : S_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ durch

$$\vartheta_h(z) := \lim_{t \searrow h} \frac{\exp(tz) - 1}{t} \quad (8.3)$$

angeben. Ihre geometrische Wirkung ist dual zu der von ξ_h .

Motiviert durch Lemma 8.3 kann man auch eine Multiplikation mit reellen Zahlen auf \mathbb{R}_h definieren.

Lemma 8.7 (der lineare Raum \mathbb{R}_h): Es sei $h \in \mathbb{R}_0^+$. Bezüglich der Addition \oplus_h und der skalaren Multiplikation

$$\alpha \odot_h z := \lim_{t \searrow h} \frac{(1 + tz)^\alpha - 1}{t} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_h$$

bildet $(\mathbb{R}_h, \oplus_h, \odot_h)$ einen eindimensionalen linearen Raum über \mathbb{R} .

Beweis: Die Inklusion $\alpha \odot_h z \in \mathbb{R}_h$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_h$ ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition von \mathbb{R}_h und der Eigenschaften der (reellen) Exponentialfunktion. Der Nachweis der Vektorraum-Axiome ergibt sich durch einfaches Nachrechnen und soll hier nicht erbracht werden. #

Weitere Ergebnisse zur Arithmetik auf \mathbb{C}_h findet man in HILGER [26].

Nach den folgenden drei Hilfsresultaten — von denen das zweite zunächst nur informativen Charakter hat — lässt sich eine Exponentialfunktion auf Maßketten definieren.

Lemma 8.8 ((positiv-) regressive Gruppe): Gegeben sei eine beliebige Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ mit der zugehörigen Körnigkeit μ^* . Dann gilt:

(a) Die Menge

$$\mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) := \{a \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) : a(t) \in \mathbb{C}_{\mu^*(t)} \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

ist bezüglich der Addition

$$(a \oplus b)(t) := a(t) \oplus_{\mu^*(t)} b(t)$$

eine Abel'sche (additive) Gruppe — die sog. regressive Gruppe — mit dem neutralen Element $0 : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{C}$ und dem zu $a \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$ inversen Element

$$(\ominus a)(t) := -\frac{a(t)}{1 + \mu^*(t)a(t)},$$

(b) weiter ist

$$\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}) := \{a \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}) : a(t) \in \mathbb{R}_{\mu^*(t)} \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^\kappa\}$$

eine Untergruppe von $(\mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}), \oplus)$, die sog. positiv-regressive Gruppe.

Beweis: (a) Da die Körnigkeit μ^* rd-stetig (siehe Beispiel 7.6) ist, gilt auch $a \oplus b \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$. Ferner ergibt sich die Eigenschaft $(a \oplus b)(t) \in \mathbb{C}_{\mu^*(t)}$ (punktweise) aus Lemma 8.1(a).

(b) Man geht analog zu (a) vor. #

Lemma 8.9 (der positiv-regressive Raum): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette mit der Körnigkeit μ^* . Dann ist $\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ bezüglich der Addition \oplus und der skalaren Multiplikation

$$(\alpha \odot a)(t) := \alpha \odot_{\mu^*(t)} a(t) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

ein linearer Raum über \mathbb{R} , der sog. positiv-regressive Raum.

Beweis: Nach Satz 7.5(b) ist auch das Produkt $\alpha \odot a$ wieder rd-stetig und $(\alpha \odot a)(t) \in \mathbb{R}_{\mu^*(t)}$ folgt (punktweise) aus Lemma 8.7; gleiches gilt für die restlichen Vektorraum-Axiome. #

Lemma 8.10 (verallgemeinerter Real- und Imaginärteil): Es sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ eine Maßkette mit der Körnigkeit μ^* und

$$\mathcal{C}_{rd}\mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) := \{a \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) : a(t) \in \mathbb{S}_{\mu^*(t)} \text{ für alle } t \in \mathbb{T}^\kappa\}.$$

Dann sind die beiden Operatoren

$$\hat{\Re} : \begin{cases} \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto \Re_{\mu^*(\cdot)}(a(\cdot)) \end{cases}, \quad \hat{\Im} : \begin{cases} \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{C}_{rd}\mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C}) \\ a & \mapsto \Im_{\mu^*(\cdot)}(a(\cdot)) \end{cases}$$

wohldefiniert. Wir nennen den Funktionswert $\hat{\Re}(a)$ den verallgemeinerten Realteil und $\hat{\Im}(a)$ den verallgemeinerten Imaginärteil der Funktion $a \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$. Zudem gilt noch die Zerlegung

$$\hat{\Re}(a) \oplus \hat{\Im}(a) = a.$$

Beweis: Die Behauptungen resultieren aus den Eigenschaften der verallgemeinerten Real- und Imaginärteil-Projektionen \Re_h und \Im_h . #

Definition 8.11 (Exponentialfunktion): Es sei eine Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ mit der Körnigkeit μ^* und $a \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$. Dann heißt die Abbildung $e_a : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$e_a(t, \tau) := \exp \left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu^*(s)}(a(s)) \Delta s \right) \quad (8.4)$$

(komplexe) Exponentialfunktion.

Beispiel 8.12: (1) Im Fall der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist $\mu^*(t) \equiv 0$ und damit

$$e_a(t, \tau) = \exp \left(\int_{\tau}^t a(s) ds \right) = e^{A(t) - A(\tau)},$$

wobei A eine Stammfunktion von a bezeichnet. Speziell für konstante Exponenten $a(t) \equiv \alpha$ erhält man $e_a(t, \tau) = e^{\alpha(t-\tau)}$.

(2) Mit Blick auf das Beispiel 7.9(3) resultiert bei der Zeitskala $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ bekanntlich $\mu^*(t) \equiv h$, somit also die Beziehung

$$e_a(t, \tau) = \exp \left(\operatorname{sgn}(t - \tau) \sum_{s=\frac{\min\{\tau, t\}}{h}}^{\frac{\max\{\tau, t\}}{h} - 1} \frac{\ln(1 + ha(hs))}{h} \right)$$

und mit konstanten Funktionen $a(t) \equiv \alpha$ auch $e_a(t, \tau) = (1 + h\alpha)^{\frac{t-\tau}{h}}$.

Satz 8.13 (dynamische Eigenschaften der Exponentialfunktion): Gegeben seien die beiden komplexwertigen Funktionen $a, b \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen erfüllt:

(a) Es gilt die Funktionalgleichung

$$\boxed{e_{a \oplus b}(t, \tau) = e_a(t, \tau) e_b(t, \tau) \quad \text{für alle } t, \tau \in \mathbb{T},} \quad (8.5)$$

und die Kozyklus-Eigenschaft

$$\boxed{e_a(t, s) e_a(s, \tau) = e_a(t, \tau) \quad \text{für alle } s, t, \tau \in \mathbb{T},} \quad (8.6)$$

(b) $e_a(\tau, \tau) = 1$ und die Funktion a ist die Wachstumsrate für $e_a(\cdot, \tau)$ ($\tau \in \mathbb{T}^\kappa$), d.h.

$$\boxed{(\Delta_1 e_a)(t, \tau) = e_a(\cdot, \tau)^\Delta(t) = a(t) e_a(t, \tau) \quad \text{für alle } t, \tau \in \mathbb{T}^\kappa,} \quad (8.7)$$

und

$$\boxed{(\Delta_2 e_a)(t, \tau) = e_a(t, \cdot)^\Delta(\tau) = -a(\tau) e_a(t, \rho^+(\tau)) \quad \text{für alle } t, \tau \in \mathbb{T}^\kappa.} \quad (8.8)$$

Beweis: (a) Die Beziehung (8.5) lässt sich im Kontext linearer dynamischer Gleichungen beweisen. Man vergleiche hierzu HILGER [21, pp. 31–32, Satz 6.2(viii)]. Dagegen resultiert (8.6) unmittelbar aus der Definition 8.11.

(b) Offenbar gilt nach Definition $e_a(\tau, \tau) = 1$.

1. Fall: $t \in RS(\mathbb{T})$, also $t \prec \rho^+(t)$, und wir erhalten aus der Beziehung (6.3)

$$\begin{aligned} (\Delta_1 e_a)(t, \tau) &= \frac{\exp\left(\int_{\tau}^{\rho^+(t)} \xi_{\mu^*(s)}(a(s)) \Delta s\right) - \exp\left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu^*(s)}(a(s)) \Delta s\right)}{\mu^*(t)} = \\ &= \frac{\exp\left(\int_t^{\rho^+(t)} \xi_{\mu^*(s)}(a(s)) \Delta s\right) - 1}{\mu^*(t)} \exp\left(\int_{\tau}^t \xi_{\mu^*(s)}(a(s)) \Delta s\right) = \\ &= \frac{\exp(\xi_{\mu^*(t)}(a(t))\mu^*(t)) - 1}{\mu^*(t)} e_a(t, \tau) \stackrel{(8.3)}{=} \vartheta_{\mu^*(t)}(\xi_{\mu^*(t)} a(t)) e_a(t, \tau) = a(t) e_a(t, \tau). \end{aligned}$$

2. Fall: $t \in RD(\mathbb{T}^\kappa)$, also $t = \rho^+(t)$. Dann ist die Funktion $\xi_{\mu^*(\cdot)}(\cdot)$ stetig in t . Zu beliebigem $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{|e_a(t, \tau)|}$ existiert eine Umgebung U von t , so dass gilt

$$|\xi_{\mu^*(r)}(a(r)) - a(t)| = |\xi_{\mu^*(r)}(a(r)) - \xi_{\mu^*(s)}(a(s))| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } r \in U \quad (8.9)$$

und folglich

$$|\xi_{\mu^*(r)}(a(r))| \leq |\xi_{\mu^*(t)}(a(t))| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } r \in U. \quad (8.10)$$

Wegen dem Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - (1+z)}{z} = 0$ gibt es ferner eine Umgebung $V \subseteq U$ von t , so dass gilt

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\int_t^s \xi_{\mu^*(r)}(a(r)) \Delta r\right) - \left(1 + \int_t^s \xi_{\mu^*(r)}(a(r)) \Delta r\right) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2|a(t)| + \varepsilon} \left| \int_t^s \xi_{\mu^*(r)}(a(r)) \Delta r \right| \leq \\ &\stackrel{(8.10)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t, s)| \quad \text{für alle } s \in V. \end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung (8.9) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &|e_a(t, \tau) - e_a(s, \tau) - a(t)e_a(t, \tau)\mu(t, s)| \leq \\ &\leq |e_a(t, \tau)| \left[\left| 1 - \exp\left(\int_t^s \xi_{\mu^*(r)}(a(r)) \Delta r\right) + \int_t^s \xi_{\mu^*(r)}(a(r)) \Delta r \right| + \left| \int_s^t (a(r) - a(t)) \Delta r \right| \right] \leq \\ &\leq |e_a(t, \tau)| \left[\frac{\varepsilon}{2} |\mu(t, s)| + \frac{\varepsilon}{2} |\mu(t, s)| \right] = \tilde{\varepsilon} |\mu(t, s)| \quad \text{für alle } s \in V \end{aligned}$$

und damit die Beziehung (8.7). Desweiteren gilt nach (a) die Identität $1 \equiv e_a(\tau, t)e_a(t, \tau)$ und damit folgt durch Differenziation nach τ

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(8.7)}{=} e_a(\rho^+(\tau), t)(\Delta_2 e_a)(t, \tau) + a(\tau)e_a(\tau, t)e_a(t, \tau) = \\ &\stackrel{(8.5)}{=} e_a(\rho^+(\tau), t)(\Delta_2 e_a)(t, \tau) + a(\tau) \quad \text{für alle } t, \tau \in \mathbb{T}^\kappa, \end{aligned}$$

was die Gleichung (8.8) impliziert. #

Korollar 8.14 (Eigenschaften der Exponentialfunktion): Gegeben seien ein $\tau \in \mathbb{T}$ und die beiden Funktionen $a \in \mathcal{C}_{rd}\mathcal{S}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$ und $b \in \mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{C})$. Dann gilt:

(a) Es ist $|e_a(t, \tau)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$,

(b) $e_b(\cdot, \tau)$ lässt sich eindeutig in einen Wachstums- und Schwingungsanteil zerlegen; es gilt

$$e_b(t, \tau) = e_{\hat{\mathfrak{R}}(b) \oplus \hat{\mathfrak{S}}(b)}(t, \tau) = e_{\hat{\mathfrak{R}}(b)}(t, \tau) e_{\hat{\mathfrak{S}}(b)}(t, \tau) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T},$$

wobei der erste Faktor positiv ist und der zweite Faktor konstanten Betrag 1 besitzt.

Beweis: Der Beweis liegt nach obigen Ausführungen auf der Hand. #

In Hinblick auf eine kurze und übersichtliche Formulierung der nächsten Resultate sind noch weitere Notationen einzuführen. Für nach unten durch 0 beschränkte Funktionen $a : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir

$$[a] := \inf_{t \in \mathbb{T}^\kappa} a(t) \quad (8.11)$$

und erhalten auf elementarem Wege die Eigenschaften

$$[a] + [b] \leq [a + b], \quad [a] [b] \leq [ab], \quad [\alpha a] = \alpha [a]$$

für $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und nach unten durch 0 beschränkte Funktionen $a, b : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$.

Die folgende Definition gestattet es, im folgenden Satz 8.18(b) und Lemma 8.23 das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion auf Maßketten näher zu beschreiben.

Definition 8.15 (dynamische Ordnung auf $\mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$): Für $a, b \in \mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ definieren wir

$$a \trianglelefteq b \quad :\Leftrightarrow \quad 0 \leq [b - a], \quad a \triangleleft b \quad :\Leftrightarrow \quad 0 < [b - a]$$

und bezeichnen a dann als dynamisch kleiner-gleich bzw. dynamisch kleiner als b .

Bemerkung 8.16: (1) Die Relation \trianglelefteq macht $\mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ zu einer geordneten Menge und ist damit reflexiv, transitiv und antisymmetrisch; dennoch ist sie nicht total und folglich $(\mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}), \trianglelefteq)$ auch keine Kette (siehe Definition 1.1).

(2) Die Relation \triangleleft ist zwar weder reflexiv, antisymmetrisch noch total, aber dennoch transitiv.

(3) Offenbar ist die Beziehung $a \trianglelefteq b$ notwendig für $a \triangleleft b$. Zudem garantieren die beiden obigen Bemerkungen (1) und (2), dass man mit den Relationen \trianglelefteq und \triangleleft auf $\mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ umgehen kann wie mit \leq und $<$ auf einer Kette \mathbb{T} bzw. wie mit \leq und $<$ auf \mathbb{R} . Insbesondere lassen sich Ungleichungsketten bilden.

Beispiel 8.17: Bei konstanten Funktionen $a(t) \equiv \alpha, b(t) \equiv \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) und $\mathbb{T} \in \{h\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ gelten offenbar die Äquivalenzen

$$a \trianglelefteq b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \beta, \quad a \triangleleft b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta.$$

Eine besondere Bedeutung besitzen reelle Exponentialfunktionen, da sich mit ihnen das asymptotische Verhalten der Lösungen dynamischer Gleichungen beschreiben lässt.

Satz 8.18 (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion): Für den Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{T}$ und die Funktionen $a, b \in \mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ gilt:

(a) Es ist $e_a(t, \tau) > 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$,

(b) unter der Voraussetzung $a \trianglelefteq b$ folgt

$$e_a(t, \tau) \leq e_b(t, \tau) \quad \text{für alle } \tau \preceq t, \quad e_a(t, \tau) \geq e_b(t, \tau) \quad \text{für alle } t \preceq \tau,$$

(c) schließlich gilt noch die Äquivalenz

$$a = 0 \in \mathcal{C}_{rd}^+ \mathcal{R}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad e_a(t, \tau) = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Bemerkung 8.19: Die Sprechweise „ a ist dynamisch kleiner-gleich b “ lässt sich dadurch motivieren, dass b im Sinne der Aussage (b) des obigen Satzes stärker als a wächst.

Beweis: (a) Nach Beziehung (6.3) gilt für $t \in \mathbb{T}$

$$e_a(\rho^+(t), \tau) \stackrel{(8.7)}{=} a(t)e_a(t, \tau)\mu^*(t) + e_a(t, \tau) = (1 + \mu^*(t)a(t))e_a(t, \tau),$$

also $e_a(\rho^+(t), \tau)e_a(t, \tau) = (1 + \mu^*(t)a(t))e_a(t, \tau)^2 \geq 0$. Weil nach Definition der Abbildung e_a beide Faktoren auf der linken Seite invertierbar sind, folgt sogar $e_a(\rho^+(t), \tau)e_a(t, \tau) > 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Wegen $e_a(\tau, \tau) = 1 > 0$ ergibt sich daraus die Behauptung nach dem Zwischenwertsatz 4.8.

(b) Aus $a \leq b$ und damit $a(t) \leq b(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ folgt $(b \ominus a)(t) \geq 0$ und daher

$$(\Delta_1 e_{b \ominus a})(t, \tau) \stackrel{(8.7)}{=} (b \ominus a)(t)e_{b \ominus a}(t, \tau) \geq 0.$$

Wegen Satz 6.20(a) resultiert

$$0 \leq e_{b \ominus a}(t, \tau) - 1 \quad \text{für alle } \tau \preceq t, \quad 0 \leq 1 - e_{b \ominus a}(t, \tau) \quad \text{für alle } t \preceq \tau$$

und aufgrund $e_{b \ominus a}(t, \tau) \stackrel{(8.5)}{=} \frac{e_b(t, \tau)}{e_a(t, \tau)}$ ergibt dies die Behauptung (b).

(c) Die Aussage (c) folgt aus (b) im Spezialfall $a = b = 0 \in \mathcal{C}_{rd}^+(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$. #

Damit lassen sich auch aus der klassischen Analysis bekannte Ungleichungen verallgemeinern:

Lemma 8.20 (Bernoulli'sche Ungleichung): *Es sei $a \in \mathcal{C}_{rd}^+(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ und*

$$0 \leq a \quad \text{oder} \quad a \leq 0. \quad (8.12)$$

Dann gilt die Bernoulli'sche Ungleichung

$$e_a(t_2, t_1) \geq 1 + \int_{t_1}^{t_2} a \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{T}. \quad (8.13)$$

Bei konstantem $a(t) \equiv \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $1 + \mu^(t)\alpha > 0$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ erhält man*

$$e_a(t_2, t_1) \geq 1 + \alpha\mu(t_2, t_1) \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{T}. \quad (8.14)$$

Beweis: O.B.d.A. sei $t_1 \preceq t_2$ und $t \in [t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$. Nach obigem Satz 8.18(b) gilt dann $e_a(t, t_1) \geq 1$ bzw. $e_a(t, t_1) \leq 1$ für $a(t) \geq 0$ bzw. $a(t) \leq 0$; in beiden Fällen also

$$a(t) \leq a(t)e_a(t, t_1) \stackrel{(8.7)}{=} (\Delta_1 e_a)(t, t_1).$$

Mit dem Satz 6.20(a) resultiert daraus

$$\int_{t_1}^{t_2} a \leq e_a(t_2, t_1) - e_a(t_1, t_1) = e_a(t_2, t_1) - 1.$$

das ist gerade die Behauptung (8.13). Bei konstantem $a(t) \equiv \alpha$ ist schließlich noch $\int_{t_1}^{t_2} a = \alpha\mu(t_2, t_1)$ und wir erhalten auch die Ungleichung (8.14). #

Beispiel 8.21: Im Fall der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ hat die Ungleichung (8.14) gerade die bekannte Form

$$(1 + \alpha)^t \geq 1 + \alpha t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}$$

und $\alpha > -1$.

Bemerkung 8.22: Wie man anhand der Definition der Exponentialfunktion (8.4) und der elementaren Ungleichung $e^t \geq 1 + t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ leicht erkennt, ist die Voraussetzung (8.12) technischer Natur. Die stellt aber keine Einschränkung in Hinblick auf unsere Anwendungen dar.

Die Bernoulli'sche Ungleichung ermöglicht es uns, das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion zu beschreiben:

Lemma 8.23 (asymptotisches Verhalten der Exponentialfunktion): *Gegeben seien die Maßkette $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ und zwei Funktionen $a, b \in \mathcal{C}_{rd}^+(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist unbeschränkt und $\tau \in \mathbb{T}$ wie in Definition 4.17 gegeben,
(ii) es gilt $b \triangleleft 0 \triangleleft a$,
(iii) die Körnigkeit μ^* ist beschränkt auf \mathbb{T}^κ .

Dann gelten folgende Grenzwertbeziehungen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_a(t, \tau) &= \infty, & \lim_{t \rightarrow -\infty} e_a(t, \tau) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_b(t, \tau) &= 0, & \lim_{t \rightarrow -\infty} e_b(t, \tau) &= \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 8.24: (1) Die Sprechweise „ a ist dynamisch kleiner b “ lässt sich dadurch motivieren, dass b nach obigem Satz im folgenden Sinne stärker als a wächst

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e_{b \ominus a}(t, \tau) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{b \ominus a}(t, \tau) = \infty \quad (8.15)$$

für beliebiges $\tau \in \mathbb{T}^\kappa$. Allerdings sind die Bedingungen (8.15) nicht hinreichend für $0 < [b - a]$ bzw. $a \triangleleft b$.

(2) Wie der Beweis zeigen wird, sind bereits die folgenden Voraussetzungen hinreichend für die jeweiligen Konvergenzaussagen:

	a	b
$t \rightarrow \infty$	(i) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist nach oben unbeschränkt, (ii) $0 \triangleleft a$ auf der Menge \mathbb{T}_τ^+ ,	(i) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist nach oben unbeschränkt, (ii) $b \triangleleft 0$ auf der Menge \mathbb{T}_τ^+ , (iii) μ^* ist beschränkt auf $(\mathbb{T}_\tau^+)^\kappa$,
$t \rightarrow -\infty$	(i) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist nach unten unbeschränkt, (ii) $0 \triangleleft a$ auf der Menge \mathbb{T}_τ^- , (iii) μ^* ist beschränkt auf $(\mathbb{T}_\tau^-)^\kappa$,	(i) $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ ist nach unten unbeschränkt, (ii) $b \triangleleft 0$ auf der Menge \mathbb{T}_τ^- .

Beweis: Wegen der Voraussetzung (ii) existiert zunächst ein $\rho > 0$ mit $b(t) \leq -\rho < 0 < \rho \leq a(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$, welches aufgrund der Beschränktheit von μ^* so klein gewählt werden kann, dass $\rho \sup_{t \in \mathbb{T}^\kappa} \mu^*(t) < 1$ erfüllt ist. In Hinblick auf obige Bemerkung zeigen wir nun alle vier Grenzwertbeziehungen separat:

(I) Nach der Bernoulli'schen Ungleichung 8.20 gilt die Abschätzung

$$e_a(t, \tau) \stackrel{(8.13)}{\geq} 1 + \int_\tau^t a \geq 1 + \int_\tau^t \rho \Delta s = 1 + \rho \mu(t, \tau) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

(II) Nach Voraussetzung (iii) gibt es ein $C \geq 0$ mit der Eigenschaft $\mu^*(s) \leq C$ für alle $s \in \mathbb{T}_\tau^-$ und wir erhalten die Abschätzung

$$-(\ominus a)(s) = \frac{a(s)}{1 + \mu^*(s)a(s)} \geq \frac{\rho}{1 + \mu^*(s)\rho} \geq \frac{\rho}{1 + C\rho} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{T}_\tau^-.$$

Dies impliziert nun

$$-\int_t^\tau \ominus a \geq \int_t^\tau \frac{\rho}{1 + C\rho} \Delta s = \frac{\rho}{1 + C\rho} \mu(\tau, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty,$$

somit wiederum nach der Bernoulli-Ungleichung 8.20

$$0 < e_a(t, \tau) \stackrel{(8.5)}{=} \frac{1}{e_{\ominus a}(t, \tau)} \stackrel{(8.13)}{\leq} \frac{1}{1 + \int_\tau^t \ominus a} = \frac{1}{1 - \int_t^\tau \ominus a} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0.$$

(III) Vollkommen analog zum Schritt (I) ist

$$e_b(t, \tau) \stackrel{(8.13)}{\geq} 1 + \int_{\tau}^t b = 1 - \int_t^{\tau} b \geq 1 + \int_t^{\tau} \rho \Delta s = 1 + \rho \mu(t, \tau) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty.$$

(IV) Die Voraussetzung (iii) garantiert die Existenz einer oberen Schranke $C \geq 0$ mit $\mu^*(s) \leq C$ für alle $s \in \mathbb{T}_{\tau}^+$ und wir erhalten neben $\rho \mu^*(s) \leq C\rho < 1$ die Abschätzung

$$(\ominus b)(s) = -\frac{b(s)}{1 + \mu^*(s)b(s)} \geq \frac{\rho}{1 - \mu^*(s)\rho} \geq \frac{\rho}{1 - C\rho} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{T}_{\tau}^+.$$

Damit resultiert

$$\int_{\tau}^t \ominus b \geq \int_{\tau}^t \frac{\rho}{1 - C\rho} \Delta s = \frac{\rho}{1 - C\rho} \mu(t, \tau) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

und des weiteren

$$0 < e_b(t, \tau) \stackrel{(8.5)}{=} \frac{1}{e_{\ominus b}(t, \tau)} \stackrel{(8.13)}{\leq} \frac{1}{1 + \int_{\tau}^t \ominus b} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist alles gezeigt. #

Korollar 8.25: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 8.23 gilt für jedes $\tau \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_a(t, \tau)}{\mu(t, \tau)} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [\mu(t, \tau) e_b(t, \tau)] = 0.$$

Beweis: Wir verwenden die Regeln von de l'Hospital aus Satz 7.16. Demnach gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_a(t, \tau)}{\mu(t, \tau)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\Delta_1 e_a)(t, \tau)}{(\Delta_1 \mu)(t, \tau)} \stackrel{(8.7)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} [a(t) e_a(t, \tau)] = \infty$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mu(t, \tau) e_b(t, \tau)] \stackrel{(8.5)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\Delta_1 \mu)(t, \tau)}{(\Delta_1 e_{\ominus b})(t, \tau)} \stackrel{(8.7)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ominus b)(t) e_{\ominus b}(t, \tau)} \stackrel{(8.5)}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e_b(t, \tau)}{(\ominus b)(t)} = 0.$$

#

Wir geben noch eine wichtige Abschätzung für das Integral über Exponentialfunktionen an.

Lemma 8.26: *Gegeben seien die Zeitpunkte $t_1, t_2, t, \tau \in \mathbb{T}^{\kappa}$ und $a, b \in \mathcal{C}_{r,d}^+(\mathbb{T}^{\kappa}, \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Für konstantes $b - a$ ist*

$$(b(t_2) - a(t_2)) \int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s = e_a(t, \tau) [e_{b \ominus a}(t_2, \tau) - e_{b \ominus a}(t_1, \tau)],$$

(b) *im Fall $[b - a] > 0$ folgt*

$$\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s \leq \frac{e_a(t, \tau)}{[b - a]} [e_{b \ominus a}(t_2, \tau) - e_{b \ominus a}(t_1, \tau)] \quad \text{für alle } t_1 \preceq t_2, \quad (8.16)$$

(c) *und für $[a - b] > 0$ erhält man*

$$\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s \leq \frac{e_a(t, \tau)}{[a - b]} [e_{b \ominus a}(t_1, \tau) - e_{b \ominus a}(t_2, \tau)] \quad \text{für alle } t_1 \preceq t_2. \quad (8.17)$$

Beweis: Für $b(s) \neq a(s)$ auf $[t_1, t_2]_{\mathbb{T}}$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s &= e_a(t, \tau) \int_{t_1}^{t_2} e_a(\tau, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s = \\
&= e_a(t, \tau) \int_{t_1}^{t_2} e_{\ominus a}(\rho^+(s), s) e_{b \ominus a}(s, \tau) \Delta s = \\
&= e_a(t, \tau) \int_{t_1}^{t_2} \frac{e_{\ominus a}(\rho^+(s), s)}{(b \ominus a)(s)} (\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau) \Delta s = \\
&= e_a(t, \tau) \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau)}{b(s) - a(s)} \Delta s. \tag{8.18}
\end{aligned}$$

(a) Offensichtlich gilt die Behauptung (a) für $a = b$ und andernfalls resultiert aus (8.18) wegen der Konstanz von $b(s) - a(s)$ sofort

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s &\stackrel{(8.18)}{=} \frac{e_a(t, \tau)}{b(t_2) - a(t_2)} \int_{t_1}^{t_2} (\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau) \Delta s = \\
&= \frac{e_a(t, \tau)}{b(t_2) - a(t_2)} [e_{b \ominus a}(t_2, \tau) - e_{b \ominus a}(t_1, \tau)].
\end{aligned}$$

(b) Wegen $[b - a] > 0$ können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s &\stackrel{(8.18)}{\leq} \frac{e_a(t, \tau)}{[b - a]} \int_{t_1}^{t_2} (\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau) \Delta s = \\
&= \frac{e_a(t, \tau)}{[b - a]} [e_{b \ominus a}(t_2, \tau) - e_{b \ominus a}(t_1, \tau)] \quad \text{für alle } t_1 \preceq t_2.
\end{aligned}$$

(c) Man erhält aufgrund $[a - b] > 0$ analog zu (b)

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} e_a(t, \rho^+(s)) e_b(s, \tau) \Delta s &\stackrel{(8.18)}{=} e_a(t, \tau) \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{a(s) - b(s)} (-\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau) \Delta s \leq \\
&\leq \frac{e_a(t, \tau)}{[a - b]} \int_{t_1}^{t_2} (-\Delta_1 e_{b \ominus a})(s, \tau) \Delta s = \\
&= \frac{e_a(t, \tau)}{[a - b]} [e_{b \ominus a}(t_1, \tau) - e_{b \ominus a}(t_2, \tau)] \quad \text{für alle } t_1 \preceq t_2,
\end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist.

#

9 Integralungleichungen

Die Gronwall-Ungleichung besitzt zahlreiche Anwendungen in der Stabilitätstheorie. Daher ist sie von grundlegender Bedeutung, um eine qualitative Theorie dynamischer Gleichungen zu betreiben. Wir weisen nun eine hinreichend allgemeine Version für auf Maßketten definierte Abbildungen und formulieren sodann einige Folgerungen.

Satz 9.1 (Gronwall-Lemma): Gegeben seien ein Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{T}$, $S \in \{\mathbb{T}_\tau^-, \mathbb{T}_\tau^+\}$ und rd-stetige Funktionen $a, u : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $b \in \mathcal{C}_{rd}^+(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R})$. Dann folgt aus der impliziten Integralungleichung

$$u(t) \leq a(t) + \int_\tau^t b(s)u(s) \Delta s \quad \text{für alle } t \in S \quad (9.1)$$

die explizite Ungleichung:

$$u(t) \leq a(t) + \int_\tau^t a(s)b(s)e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) \leq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Bemerkung 9.2: (1) Für die Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ entspricht der Satz 9.1 gerade dem Gronwall-Lemma aus AMANN [3, p. 99]. Im Fall der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ finden sich Gronwall-Lemmata etwa bei AGARWAL [1, pp. 182–190]. Bei Resultaten auf beliebigen Maßketten vergleiche man HILGER [25, Theorem 10] und ÖZGÜN, ZAFER & KAYMAKÇALAN [37, Theorem 4.1, Theorem 4.2].

(2) Gilt $b(t) \leq 0$ für alle $t \leq \tau$, so lässt sich unter der etwas stärkeren Voraussetzung

$$(1 + \mu^*(t)b(t)) u(t) \leq a(t) + \int_t^\tau b(s)u(s) \Delta s \quad \text{für alle } t \preceq \tau$$

die Abschätzung

$$(1 + \mu^*(t)b(t)) u(t) \leq a(t) + \int_t^\tau a(s)b(s)e_b(s, t) \Delta s \quad \text{für alle } t \preceq \tau$$

nachweisen.

Beweis: Wir betrachten lediglich den Fall $S = \mathbb{T}_\tau^+$ und $b(t) \geq 0$ und definieren die rd-stetig-differenzierbare Abbildung $w : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w(t) := e_b(\tau, t) \int_\tau^t b(s)u(s) \Delta s. \quad (9.3)$$

Dann folgt nach der Produktregel aus Satz 6.10(b)

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &\stackrel{(9.3)}{=} e_b(\tau, \rho^+(t))b(t)u(t) - b(t)e_b(\tau, \rho^+(t)) \int_\tau^t b(s)u(s) \Delta s = \\ &= b(t)e_b(\tau, \rho^+(t)) \left(u(t) - \int_\tau^t b(s)u(s) \Delta s \right) \stackrel{(9.1)}{\leq} a(t)b(t)e_b(\tau, \rho^+(t)) \quad \text{für alle } \tau \preceq t \end{aligned}$$

und wir können den Mittelwertsatz 6.20(a) einsetzen:

$$w(t) = w(t) - w(\tau) \leq \int_\tau^t a(s)b(s)e_b(\tau, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } \tau \preceq t. \quad (9.4)$$

Eine zweite Anwendung der impliziten Ungleichung (9.1) führt auf

$$u(t) \stackrel{(9.3)}{\leq} a(t) + e_b(t, \tau)w(t) \stackrel{(9.4)}{\leq} a(t) + \int_\tau^t a(s)b(s)e_c(t, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } \tau \preceq t$$

und damit auf die Behauptung. #

Unter etwas restriktiveren Voraussetzungen gelangt man nun zu handlicheren Abschätzungen.

Korollar 9.3: *Ist die Abbildung $a : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ unter den Voraussetzungen von Satz 9.1 differenzierbar, so gilt die Abschätzung*

$$u(t) \leq e_b(t, \tau) \left(a(\tau) + \int_\tau^t a^\Delta(s) e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \right) \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) \leq 0 \end{cases}.$$

Beweis: Mittels partieller Integration (vergleiche hierzu Satz 7.14(b)) erhält man

$$\begin{aligned} u(t) &\stackrel{(9.2)}{\leq} a(t) - \int_\tau^t a(s) [-b(s) e_b(t, \rho^+(s))] \Delta s = \\ &= a(t) - \left[a(s) e_b(t, s) \Big|_{s=\tau}^{s=t} - \int_\tau^t a^\Delta(s) e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \right] = \\ &= e_b(t, \tau) \left(a(\tau) + \int_\tau^t a^\Delta(s) e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \right) \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) \leq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

also die Behauptung. #

Korollar 9.4: *Ist die Abbildung $a : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ unter den Voraussetzungen von Satz 9.1 monoton, so gilt die Abschätzung*

$$u(t) \leq \left(\max_{s \in \{\tau, t\}} a(s) \right) e_b(t, \tau) \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) \leq 0 \end{cases}.$$

Bemerkung 9.5: Die beiden Korollare 9.3 und 9.4 sind offenbar insbesondere für konstante Funktionen a anwendbar und liefern dann gleiche Resultate.

Beweis: Aufgrund der Monotonie von a erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} u(t) &\stackrel{(9.2)}{\leq} a(t) + \int_\tau^t a(s) b(s) e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \leq \\ &\leq \left(\max_{s \in \{\tau, t\}} a(s) \right) \left(1 - \int_\tau^t [-b(s) e_b(t, \rho^+(s))] \Delta s \right) = \\ &= \left(\max_{s \in \{\tau, t\}} a(s) \right) \left(1 - \int_\tau^t (\Delta_2 e_b)(t, s) \Delta s \right) = \\ &= \left(\max_{s \in \{\tau, t\}} a(s) \right) e_b(t, \tau) \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. #

Korollar 9.6: *Unter den Voraussetzungen von Satz 9.1 mit $b : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt aus der impliziten Integralungleichung*

$$u(t) \leq \int_\tau^t [a(s) + b(s)u(s)] \Delta s \quad \text{für alle } t \in S \tag{9.5}$$

die explizite Abschätzung

$$u(t) \leq \int_\tau^t a(s) e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_\tau^+, \text{ falls } b(t) > 0 \\ t \in \mathbb{T}_\tau^-, \text{ falls } b(t) < 0 \end{cases}.$$

Beweis: Wir definieren zunächst die Abbildung $w : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$, $w(t) := u(t) + \frac{a(t)}{b(t)}$. Die vorausgesetzte Ungleichung (9.5) lautet nun

$$w(t) - \frac{a(t)}{b(t)} \leq \int_\tau^t \left[a(s) + b(s) \left(w(s) - \frac{a(s)}{b(s)} \right) \right] \Delta s = \int_\tau^t b(s) w(s) \Delta s \quad \text{für alle } t \in S.$$

Aus der äquivalenten Abschätzung

$$w(t) \leq \frac{a(t)}{b(t)} + \int_{\tau}^t b(s)w(s) \Delta s \quad \text{für alle } t \in S$$

folgt nun mittels des Gronwall-Lemmas 9.1(a) einerseits

$$w(t) \stackrel{(9.2)}{\leq} \frac{a(t)}{b(t)} + \int_{\tau}^t a(s)e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } t \in S$$

und nach Rücksubstitution

$$u(t) \leq \int_{\tau}^t a(s)e_b(t, \rho^+(s)) \Delta s \quad \text{für alle } \begin{cases} t \in \mathbb{T}_{\tau}^+, & \text{falls } b(t) \geq 0 \\ t \in \mathbb{T}_{\tau}^-, & \text{falls } b(t) \leq 0 \end{cases},$$

also die Behauptung. #

Lemma 9.7 (Dichotomie-Ungleichungen): Gegeben seien die reellen Konstanten $C_1, C_2 \geq 0$, die Wachstumsraten $a, b \in \mathcal{C}_{rd}^+(\mathbb{T}^{\kappa}, \mathbb{R})$ mit

$$a \triangleleft 0 \triangleleft b, \quad \vartheta := C_2 \left(\frac{1}{[-a]} + \frac{1}{[b]} \right) \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$$

sowie eine beschränkte Funktion $u \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_0^+)$.

(a) Dann folgt aus der impliziten Integralungleichung

$$u(t) \leq C_1 e_a(t, \tau) + C_2 \left(\int_{\tau}^t e_a(t, \rho^+(r))u(r) \Delta r + \int_t^{\infty} e_b(t, \rho^+(r))u(r) \Delta r \right) \quad \text{für alle } \tau \preceq t \quad (9.6)$$

die explizite Ungleichung

$$u(t) \leq \frac{C_1}{1 - \vartheta} e_{a + \frac{C_2}{1 - \vartheta}}(t, \tau) \quad \text{für alle } \tau \preceq t, \quad (9.7)$$

(b) aus der impliziten Integralungleichung

$$u(t) \leq C_1 e_b(t, s) + C_2 \left(\int_{\tau}^t e_a(t, \rho^+(r))u(r) \Delta r + \int_t^s e_b(t, \rho^+(r))u(r) \Delta r \right) \quad \text{für alle } \tau \preceq t \preceq s$$

folgt im Fall $\frac{C_2}{1 - \vartheta} \mu^*(t) < 1 + \mu^*(t)b(t)$ (für alle $t \in \mathbb{T}_{\tau}^+$) die explizite Ungleichung

$$u(t) \leq \frac{C_1}{1 - \vartheta} e_{b - \frac{C_2}{1 - \vartheta}}(t, s) \quad \text{für alle } \tau \preceq t \preceq s.$$

Beweis: (a) Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Es gelte $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$. Wir definieren die Funktion $w : \mathbb{T}_{\tau}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $w(t) := \sup_{t \preceq s} u(s)$, welche offenbar monoton fällt. Darüber hinaus existiert zu jedem $t \in \mathbb{T}_{\tau}^+$ ein $t' \in [t, \infty)_{\mathbb{T}}$ mit

$$w(t) = u(t') = w(r) \quad \text{für alle } s \in [t, t']_{\mathbb{T}}. \quad (9.8)$$

Ersetzt man t durch t' in (9.6), so folgt

$$\begin{aligned} w(t) &\stackrel{(9.8)}{=} u(t') \leq \\ &\leq C_1 e_a(t', \tau) + C_2 \left(\int_{\tau}^{t'} e_a(t', \rho^+(r))u(r) \Delta r + \int_{t'}^{\infty} e_b(t', \rho^+(r))u(r) \Delta r \right) \quad \text{für alle } \tau \preceq t' \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq C_1 e_a(t', \tau) + C_2 \left(\int_{\tau}^{t'} e_a(t', \rho^+(r)) u(r) \Delta r + \int_{t'}^{\infty} e_b(t', \rho^+(r)) w(r) \Delta r \right) = \\
&= C_1 e_a(t', \tau) + C_2 \int_{\tau}^{t'} e_a(t', \rho^+(r)) u(r) \Delta r + \\
&\quad + C_2 \left(\int_t^{t'} e_a(t', \rho^+(r)) u(r) \Delta r + \int_{t'}^{\infty} e_b(t', \rho^+(r)) w(r) \Delta r \right) \leq \\
&\leq C_1 e_a(t', \tau) + C_2 \int_{\tau}^t e_a(t', \rho^+(r)) u(r) \Delta r + \\
&\quad + C_2 w(t) \left(\int_t^{t'} e_a(t', \rho^+(r)) \Delta r + \int_{t'}^{\infty} e_b(t', \rho^+(r)) \Delta r \right) \leq \\
&\leq C_1 e_a(t', \tau) + C_2 \int_{\tau}^t e_a(t', \rho^+(r)) u(r) \Delta r + C_2 w(t) \left(\frac{1}{[-a]} + \frac{1}{[b]} \right) \quad \text{für alle } \tau \preceq t.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\vartheta \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$, $a \triangleleft 0$ und $t \preceq t'$ ergibt dies nun

$$w(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta} e_a(t, \tau) + \frac{C_2}{1-\vartheta} \int_{\tau}^t e_a(t, \rho^+(r)) u(r) \Delta r \quad \text{für alle } \tau \preceq t$$

und mit der Funktion $v: \mathbb{T}_{\tau}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $v(t) := e_{\ominus a}(t, \tau) w(t)$ folgt daraus

$$v(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta} + \frac{C_2}{1-\vartheta} \int_{\tau}^t \frac{v(r)}{1+\mu^*(r)a(r)} \Delta r \quad \text{für alle } \tau \preceq t.$$

Nun kann das Gronwall-Lemma 9.3 eingesetzt werden und liefert $v(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta} e_c(t, \tau)$ für alle $\tau \preceq t$ mit $b(t) := \frac{1}{1+\mu^*(t)a(t)} \frac{C_2}{1-\vartheta}$, nach Definition von v und w also

$$u(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta} e_{a+\frac{C_2}{1-\vartheta}}(t, \tau) \quad \text{für alle } \tau \preceq t, \quad (9.9)$$

d.h. die behauptete Ungleichung (9.7).

2. Fall: Fortan sei u nur noch beschränkt auf \mathbb{T}_{τ}^+ . Für ein $\beta \in (0, [b]_{\mathbb{R}})$ setzen wir $v_{\beta}(t) := e_{\ominus \beta}(t, \tau) u(t)$ und erhalten $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\beta}(t) = 0$. Aus (9.6) folgt für v_{β} damit

$$\begin{aligned}
0 &\leq v_{\beta}(t) \leq \\
&\stackrel{(9.6)}{\leq} C_1 e_{a\ominus\beta}(t, \tau) + C_2 \left(\int_{\tau}^t \frac{e_{a\ominus\beta}(t, \rho^+(r))}{1+\beta\mu^*(r)} v_{\beta}(r) \Delta r + \int_t^{\infty} \frac{e_{b\ominus\beta}(t, \rho^+(r))}{1+\beta\mu^*(r)} v_{\beta}(r) \Delta r \right) \leq \\
&\leq C_1 e_{a\ominus\beta}(t, \tau) + C_2 \left(\int_{\tau}^t e_{a\ominus\beta}(t, \rho^+(r)) v_{\beta}(r) \Delta r + \int_t^{\infty} e_{b\ominus\beta}(t, \rho^+(r)) v_{\beta}(r) \Delta r \right). \quad (9.10)
\end{aligned}$$

Also lässt sich der erste Fall auf die Funktion v_{β} unter der Voraussetzung (9.10) anwenden und liefert analog zu (9.9)

$$v_{\beta}(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta_{\beta}} e_{(a\ominus\beta)+\frac{C_1}{1-\vartheta_{\beta}}}(t, \tau) \quad \text{für alle } \tau \preceq t$$

mit $\vartheta_{\beta} := C_2 \left(\frac{1}{[-(a\ominus\beta)]} + \frac{1}{[b\ominus\beta]} \right)$. Beachtet man nun die Definition von v_{β} und bildet den Limes $\beta \searrow 0$, so folgt

$$0 \leq u(t) \leq \frac{C_1}{1-\vartheta} e_{a+\frac{C_2}{1-\vartheta}}(t, \tau) \quad \text{für alle } \tau \preceq t,$$

also die Behauptung.

(b) Man geht entsprechend zu (a) vor. #

10 Kontraktionsprinzipien

Gerade im Bereich der nichtlinearen Analysis führt eine große Anzahl von Problemen auf Fixpunktgleichungen. Im Kontext der Maßketten sind etwa die Lösungen dynamischer Gleichungen als Fixpunkte einer Integralgleichung definiert.

Wir erklären schon jetzt eine wichtige Voraussetzung, welche eigentlich erst später im Problemkreis der Existenzaussagen für die Lösungen dynamischer Gleichungen relevant wird.

Im Folgenden sei $(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$ stets eine beliebige Maßkette.

Definition 10.1 (rd-Stetigkeit): \mathcal{P} sei ein Banach-Raum. Eine Funktion $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *rd-stetig*, falls für alle Paare $(x_0, p_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P}$ gilt:

(i) Zu jedem rechts-dichten oder maximalen $t_0 \in \mathbb{T}$ ist f stetig in (x_0, p_0, t_0) ,

(ii) zu jedem links-dichten $t_0 \in \mathbb{T}$ existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{(x,p) \rightarrow (x_0,p_0)} f(x; p, t_0), \quad \lim_{\substack{(x,p,t) \rightarrow (x_0,p_0,t_0) \\ t \prec t_0}} f(x; p, t).$$

Die Menge aller solchen Abbildung bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{rd}(\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$.

Ein primär für die Beweistechnik dieses Kapitels, aber im weiteren Verlauf der Arbeit eher sekundäres Hilfsmittel, stellt die folgende Definition bereit.

Definition 10.2 (die Abbildung $f^{\tau]$): \mathcal{P} bezeichne einen Banach-Raum. Mit einer rd-stetigen Abbildung $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ und festem $\tau \in \mathbb{T}^\kappa$ definieren wir die Funktion $f^{\tau] : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}_\tau^- \rightarrow \mathcal{X}$ durch

$$f^{\tau]}(x; p, t) = \begin{cases} f(x; p, t) & \text{für } (x, p, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times (-\infty, \tau)_\mathbb{T} \\ \lim_{\substack{(y,q,s) \rightarrow (x,p,\tau) \\ s \prec \tau}} f(y; q, s) & \text{für } (x, p, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \{\tau\} \end{cases}.$$

Bemerkung 10.3: (1) Für stetige Abbildungen $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ gilt offenbar die Identität $f^{t]}(x; p, t) \equiv f(x; p, t)$ auf $\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}^\kappa$.

(2) $f^{\tau]}$ stimmt lediglich für Zeitpunkte $t \in LD(\mathbb{T}) \cap RS(\mathbb{T})$ nicht notwendig mit der Restriktion $f|_{\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}_\tau^-}$ überein, wie die Abbildung $f(x; t) := \mu^*(t)x$ auf der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_\mathbb{R}$ demonstriert.

Die Zweckmäßigkeit der Abbildung $f^{\tau]}$ bei gleichmäßigen Kontraktionsprinzipien wird im Rest dieses Kapitels deutlich werden. Bevor wir jedoch dazu kommen, sind noch einige ihrer elementaren Eigenschaften zu formulieren.

Lemma 10.4: Genügt eine Abbildung $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ der globalen Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x; p, t) - f(\bar{x}; p, t)\| \leq L(t) \|x - \bar{x}\| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}^\kappa, x, \bar{x} \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P} \quad (10.1)$$

mit einer Funktion $L \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}^\kappa, \mathbb{R}_0^+)$, so auch $f^{t]}$ mit der gleichen Lipschitz-Konstanten L .

Beweis: f und $f^{t]}$ können nur zu Zeitpunkten $t_0 \in LD(\mathbb{T}) \cap RS(\mathbb{T})$ nicht übereinstimmen. Sei also $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$ links-dicht und rechts-zerstreut, sowie $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(-\infty, t_0)_\mathbb{T}$ mit dem Grenzwert t_0 . Dann gilt offenbar

$$\|f(x; p, t_n) - f(\bar{x}; p, t_n)\| \stackrel{(10.1)}{\leq} L(t_n) \|x - \bar{x}\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x, \bar{x} \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P},$$

womit die Behauptung durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ nach Definition 10.2 folgt. #

Am Anfang steht ein fundamentales Resultat.

Lemma 10.5 (Kontraktionsprinzip): *Es sei \mathcal{X} ein Banach-Raum und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Konstante $L \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$ mit*

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq L \|x - \bar{x}\| \quad \text{für alle } x, \bar{x} \in \mathcal{X}.$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt $x^* \in \mathcal{X}$.

Beweis: Einen Beweis findet man etwa in LANG [35, p. 360, Lemma 1.1]. #

Weiter benötigen wir Informationen darüber, wie sich die Lösungen von Fixpunktproblemen verhalten, wenn sich darin vorkommende Parameter stetig ändern.

Korollar 10.6 (gleichmäßiges \mathcal{C}^0 -Kontraktionsprinzip): *Gegeben seien die zwei Banach-Räume $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{P}, |\cdot|)$ und die Abbildung $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit den Eigenschaften:*

(i) *f ist eine gleichmäßige Kontraktion in $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$, d.h. es existiert eine $L \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$ mit*

$$\|f(x; p, t) - f(\bar{x}; p, t)\| \leq L \|x - \bar{x}\| \quad \text{für alle } x, \bar{x} \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}, t \in \mathbb{T}, \quad (10.2)$$

(ii) *$f(x; \cdot) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}_{rd})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ für jedes $x \in \mathcal{X}$.*

Dann gilt:

(a) *$f(\cdot; p, t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ hat für jedes $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ genau einen Fixpunkt $x^*(p, t) \in \mathcal{X}$, d.h. es existiert eine Funktion $x^* : \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $f(x^*(p, t); p, t) \equiv x^*(p, t)$ auf $\mathcal{P} \times \mathbb{T}$,*

(b) *$x^* \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}_{rd})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ und*

(c) *$x^* \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$, falls $f(x; \cdot) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ für jedes $x \in \mathcal{X}$.*

Beweis: (a) Da die Abbildung $f(\cdot; p, t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ nach Voraussetzung eine Kontraktion — mit von den Parametern (p, t) unabhängiger Kontraktionskonstante L — ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit des von $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ abhängigen Fixpunktes $x^*(p, t) \in \mathcal{X}$ unmittelbar aus Lemma 10.5. Es bleiben die behaupteten Stetigkeitsaussagen zu zeigen.

(b) Für beliebige Paare $(p, t), (p_0, t_0) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ gelten die Fixpunktbeziehungen

$$f(x^*(p, t); p, t) = x^*(p, t), \quad f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) = x^*(p_0, t_0) \quad (10.3)$$

und es resultiert die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|x^*(p, t) - x^*(p_0, t_0)\| \stackrel{(10.3)}{=} \|f(x^*(p, t); p, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| \leq \\ & \leq \|f(x^*(p, t); p, t) - f(x^*(p_0, t_0); p, t)\| + \|f(x^*(p_0, t_0); p, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| \leq \\ & \stackrel{(10.2)}{\leq} L \|x^*(p, t) - x^*(p_0, t_0)\| + \|f(x^*(p_0, t_0); p, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|, \end{aligned}$$

woraus man

$$\|x^*(p, t) - x^*(p_0, t_0)\| \leq \frac{1}{1-L} \|f(x^*(p_0, t_0); p, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| \quad (10.4)$$

erhält. Hieraus ergibt sich die Stetigkeit der Fixpunktfunktion $x^*(\cdot, t_0)$ mittels der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x^*(p_0, t_0), \cdot, t_0)$, indem man in (10.4) $t := t_0$ setzt und den Limes $p \top_0$ betrachtet. Um die rd-Stetigkeit von $x^*(p_0, \cdot)$ zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $t_0 \in RD(\mathbb{T})$ oder t_0 ist \mathbb{T} -maximal. Dann ist $f(x^*(p_0, t_0), p_0, \cdot)$ nach Voraussetzung (ii) und Definition 7.3 stetig in t_0 . Durch Grenzübergang $t \rightarrow t_0$ in (10.4) folgt auch die Stetigkeit von $x^*(p_0, \cdot)$ in t_0 .
2. Fall: $t_0 \in LD(\mathbb{T}) \cap RS(\mathbb{T})$. Wegen Lemma 10.4 ist auch $f^{t_0}(\cdot; p_0, t_0) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Kontraktion und

besitzt daher nach Lemma 10.5 einen eindeutigen Fixpunkt $x_0 \in \mathcal{X}$. Für $t \prec t_0$ erhält man analog zur (10.4) die Abschätzung

$$\|x^*(p_0, t) - x_0\| \leq \frac{1}{1-L} \left\| f(x_0; p_0, t) - f^{t_0}(x_0; p_0, t_0) \right\|;$$

deren rechte Seite konvergiert für $t \nearrow t_0$ nach Definition der Abbildung f^{t_0} gegen 0, womit der Grenzwert $\lim_{t \nearrow t_0} x^*(p_0, t)$ existiert.

Zusammenfassend ist $x^*(p_0, \cdot)$ dann rd-stetig.

(c) Bei stetigem $f(x; p_0, \cdot)$ folgt die Behauptung wie unter b im obigen 1. Fall. #

Wir werden das gleichmäßige \mathcal{C}^0 -Kontraktionsprinzip aus Korollar 10.6 auch in einer etwas spezielleren Form benötigen. Sie ist eine unmittelbare Konsequenz und betrifft die Lösbarkeit gewisser parameterabhängiger Gleichungen, deren rechte Seite nur durch eine (gleichmäßige) Kontraktion von der Identität abweicht.

Korollar 10.7: Die Abbildung $F : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ sei eine gleichmäßige Kontraktion in den Variablen $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ und $x_0 : \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ eine beliebige Funktion. Dann gilt für die Fixpunktgleichung

$$x = F(x; p, t) + x_0(p, t).$$

(a) Sie hat für jedes $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ genau eine Lösung $x(p, t) \in \mathcal{X}$, d.h. es existiert eine Funktion $x : \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $x(p, t) \equiv F(x(p, t); p, t) + x_0(p, t)$ auf $\mathcal{P} \times \mathbb{T}$,

(b) $x \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}_{rd})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$, falls $x_0, F(\xi; \cdot) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}_{rd})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ für jedes $\xi \in \mathcal{X}$ gilt.

Beweis: Die Aussagen (a) und (b) resultieren aus den entsprechenden Behauptungen von Korollar 10.6. Wir gehen daher nur auf die Aussage (b) ein. Mit der Funktion F ist auch durch

$$f(x; p, t) := F(x; p, t) + x_0(p, t)$$

eine in $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ gleichmäßige Kontraktion $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben und zwar unabhängig von der Funktion x_0 . Weiter ist $f(\xi; \cdot)$ nach Voraussetzung für jedes $\xi \in \mathcal{X}$ aus $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}_{rd})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$. Dann folgt die Behauptung (b) sofort aus Korollar 10.6, angewandt auf die Abbildung f . #

Das gleichmäßige \mathcal{C}^0 -Kontraktionsprinzip aus Korollar 10.6 lässt sich jetzt dahingehend verschärfen, eine \mathcal{C}^m -Abhängigkeit der Fixpunkte gleichmäßiger Kontraktionen der Klasse \mathcal{C}^m vom Parameter zu garantieren. Man vergleiche dazu unter anderem HALE [19, p. 7, Theorem 3.2] oder CHOW & HALE [11, p. 25, Theorem 2.2]. Wir wollen diese Aussage nun auch auf Abbildungen verallgemeinern, die von Parametern aus Maßketten abhängig sind.

Satz 10.8 (gleichmäßiges \mathcal{C}^m -Kontraktionsprinzip): Vorgegeben seien die beiden Banach-Räume $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{P}, |\cdot|)$ und die Abbildung $f : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit den Eigenschaften

(i) f ist eine gleichmäßige Kontraktion in $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$, d.h. es existiert eine Konstante $L \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$ mit

$$\|f(x; p, t) - f(\bar{x}; p, t)\| \leq L \|x - \bar{x}\| \quad \text{für alle } x, \bar{x} \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}, t \in \mathbb{T}, \quad (10.5)$$

(ii) $f \in (\mathcal{C}^m \times \mathcal{C}_{rd}^n)(\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ für $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \{0, 1\}$.

Dann gilt:

(a) $f(\cdot; p, t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ hat für jedes $(p, t) \in \mathcal{P} \times \mathbb{T}$ genau einen Fixpunkt $x^*(p, t) \in \mathcal{X}$, d.h. es existiert eine Funktion $x^* : \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $f(x^*(p, t); p, t) \equiv x^*(p, t)$ auf $\mathcal{P} \times \mathbb{T}$,

(b) $x^* \in (\mathcal{C}^m \times \mathcal{C}_{rd}^n)(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$ und $x^* \in (\mathcal{C}^m \times \mathcal{C})(\mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$, falls $f \in (\mathcal{C}^m \times \mathcal{C})(\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$,

(c) im Fall $m \in \mathbb{N}$ genügt $(D_1x^*)(p, t) \in \mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})$ der Operatorengleichung

$$T = (D_1f)(x^*(p, t); p, t)T + (D_2f)(x^*(p, t); p, t) \quad (10.6)$$

und im Fall $n = 1$ genügt $(\Delta_2x^*)(p, t) \in \mathcal{X}$ der Gleichung

$$x = \left[\int_0^1 (D_1f)(x^*(p, t) + s\mu^*(t)x; p, \rho^+(t)) ds \right] x + (\Delta_3f)(x^*(p, t); p, t). \quad (10.7)$$

Bemerkung 10.9: Man beachte hierbei, dass die Gleichung (10.7) für die Ableitung nach $t \in \mathbb{T}$ im Gegensatz zu (10.6) im Allgemeinen, d.h. in rechts-zerstreuten Punkten (beachte $\mu^*(t) > 0$), nichtlinear ist.

Beweis: Als Vorbereitung halten wir fest, dass D_1f nach PÖTZSCHE [38, p. 154, Lemma A.3.2] wie folgt global beschränkt ist

$$\|(D_1f)(x; p, t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq L < 1 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}, p \in \mathcal{P}, t \in \mathbb{T}. \quad (10.8)$$

(a) Die Aussage (a) des Satzes folgt mittels des gleichmäßigen \mathcal{C}^0 -Kontraktionsprinzips in Korollar 10.6(a).

(b) Die Behauptung bezüglich der Regularität der Funktion $x^* : \mathcal{P} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ beweisen wir in zwei Schritten. Zunächst resultiert die Aussage (b) für $m = n = 0$ wieder mittels Korollar 10.6(b) und (c).

(I) Behauptung: Für jedes $t_0 \in \mathbb{T}$ ist die Abbildung $x^*(\cdot, t_0) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ m -mal stetig differenzierbar.

Begründung: Es seien $n \in \{0, 1\}$ und $p \in \mathcal{P}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ beliebig, aber fest. Wir gehen induktiv über $m \in \mathbb{N}$ vor und zeigen die Behauptung zunächst für $\underline{m} = 1$. Es gilt dazu analog zur Beziehung (10.4) im Beweis von Korollar 10.6 für beliebige $p, h \in \mathcal{P}$ die Ungleichung

$$\|x^*(p+h, t_0) - x^*(p, t_0)\| \leq \frac{1}{1-L} \|f(x^*(p, t_0); p+h, t_0) - f(x^*(p, t_0); p, t_0)\|,$$

womit nach dem Schrankensatz

$$\|x^*(p+h, t_0) - x^*(p, t_0)\| \leq \frac{1}{1-L} \sup_{s \in [0,1]_{\mathbb{R}}} \|(D_2f)(x^*(p, t_0); p+sh, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})} |h| \quad (10.9)$$

resultiert. Fixiert man einen beliebigen Parameterwert $p_0 \in \mathcal{P}$ und definiert nun die reelle Konstante $C_1(p_0, t_0) := \|(D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})} + 1$, so ergibt sich — da $(D_2f)(\cdot; \cdot, t_0)$ und $x^*(\cdot, t_0)$ stetig sind — die Existenz eines $\delta = \delta(p_0, t_0) > 0$ mit

$$\sup_{s \in [0,1]_{\mathbb{R}}} \|(D_2f)(x^*(p, t_0); p+sh, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})} \leq C_1(p_0, t_0) \quad (10.10)$$

für alle $p \in B_\delta(p_0)$ und $h \in B_\delta(0)$. Für diese beiden Vektoren p und h resultiert dann aus der Abschätzung (10.9)

$$\|x^*(p+h, t_0) - x^*(p, t_0)\| \leq \frac{C_1(p_0, t_0)}{1-L} |h|; \quad (10.11)$$

zu jedem $p_0 \in \mathcal{P}$ existiert also eine Umgebung $B_\delta(p_0)$, auf der x^* einer Lipschitz-Bedingung genügt. Man betrachte jetzt die lineare Operatorengleichung

$$T = (D_1f)(x^*(p, t_0); p, t_0)T + (D_2f)(x^*(p, t_0); p, t_0) \quad (10.12)$$

in $\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})$. Dieser lineare Raum ist mit \mathcal{X} vollständig (siehe hierzu LANG [35, p. 66]), womit nach Korollar 10.7(a) und Beziehung (10.8) die eindeutige Lösbarkeit der obigen Operatorgleichung (10.12) folgt; ihre Lösung sei mit $T(p, t_0)$ bezeichnet. Sie hängt stetig von $p \in \mathcal{P}$ ab, da die rechte Seite in (10.12) stetig im Parameter p ist. Nun bleibt noch die Differenzierbarkeit der Fixpunktfunktion $x^*(\cdot, t_0) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ in

einem beliebigen, aber festen Punkt $p_0 \in \mathcal{P}$ zu zeigen. Für jedes Element $h \in \mathcal{P}$ erhält man aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung in seiner Integralform die Identität

$$\begin{aligned}
& x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0) - T(p_0, t_0)h = \\
&= f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0, t_0) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) + \\
&+ f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + h, t_0) - f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0, t_0) - T(p_0, t_0)h = \\
&\stackrel{(10.12)}{=} f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0, t_0) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)T(p_0, t_0)h + \\
&+ f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + h, t_0) - f(x^*(p_0 + h, t_0); p_0, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)h = \\
&= \left[\int_0^1 (D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0))); p_0, t_0) - \right. \\
&\quad \left. - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) ds \right] (x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0)) + \\
&\quad + \left[\int_0^1 (D_2f)(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + sh, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) ds \right] h + \\
&\quad + (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0)) - \\
&\quad - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)T(p_0, t_0)h = \\
&= \left[\int_0^1 (D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0))); p_0, t_0) - \right. \\
&\quad \left. - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) ds \right] (x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0)) + \\
&\quad + \left[\int_0^1 (D_2f)(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + sh, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) ds \right] h + \\
&\quad + (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0) - T(p_0, t_0)h).
\end{aligned}$$

Um an dieser Stelle die leicht zu verifizierende Charakterisierung von Differenzierbarkeit aus SIEGMUND [41, p. 85, Lemma A.1] einsetzen zu können, folgt durch normweise Betrachtung mit Beziehung (10.5) für alle $h \in B_\delta(0)$ (mit dem $\delta = \delta(p_0, t_0)$ aus der Beziehung (10.10)) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0) - T(p_0, t_0)h\| \leq \\
&\leq \frac{1}{1-L} \left\| \int_0^1 (D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0))); p_0, t_0) - \right. \\
&\quad \left. - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) ds \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0)\| + \frac{\|J\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{1-L} \cdot \\
&\quad \cdot \left\| \int_0^1 (D_2f)(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + sh, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) s ds \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})} |h| \leq \\
&\stackrel{(10.11)}{\leq} \left[\frac{C_1(p_0, t_0)}{(1-L)^2} \int_0^1 \|(D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0))); p_0, t_0) - \right. \\
&\quad \left. - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} ds + \frac{\|J\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{1-L} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_0^1 \|(D_2f)(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + sh, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})} s ds \right] |h| \leq r(h) |h|,
\end{aligned}$$

wobei das Restglied $r : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$\begin{aligned}
r(h) &:= \frac{C_1(p_0, t_0)}{(1-L)^2} \sup_{t \in [0,1]_{\mathbb{R}}} \|(D_1f)(x^*(p_0, t_0) + t(x^*(p_0 + h, t_0) - x^*(p_0, t_0))); p_0, t_0) - \\
&\quad - (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + \\
&\quad + \frac{\|J\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}{1-L} \sup_{t \in [0,1]_{\mathbb{R}}} \|(D_2f)(x^*(p_0 + h, t_0); p_0 + th, t_0) - (D_2f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})}
\end{aligned}$$

definiert ist. Nach SIEGMUND [41, p. 85, Lemma A.1] ist nur noch $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ nachzuweisen. Das gilt aber wegen der Stetigkeit von $(D_1f)(\cdot; \cdot, t_0)$, $(D_2f)(\cdot; \cdot, t_0)$ und $x^*(\cdot, t_0)$ in p . Damit ist die Fixpunktfunktion $x^*(\cdot, t_0)$ im Punkt $p_0 \in \mathcal{P}$ differenzierbar und besitzt dort die Ableitung $T(p_0, t_0)$, mit dem stetigen $T(\cdot, t_0) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{P}; \mathcal{X})$. Noch offen ist der Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$. Nach Induktionsvoraussetzung gelte also $x^*(\cdot, t_0) \in \mathcal{C}^m(\mathcal{P}, \mathcal{X})$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $f(\cdot; \cdot, t_0)$ ist $(m+1)$ -mal stetig-differenzierbar. Aufgrund der Beziehung $(D_1x^*)(p, t_0) = T(p, t_0)$ für jedes $p \in \mathcal{P}$ hat die Operatorgleichung (10.6) nun die Form

$$(D_1x^*)(p, t_0) = (D_1f)(x^*(p, t_0); p, t_0)(D_1x^*)(p, t_0) + (D_2f)(x^*(p, t_0); p, t_0) \quad \text{auf } \mathcal{P}; \quad (10.13)$$

dies ist eine Fixpunktgleichung mit m -mal stetig-differenzierbaren Funktionen (bezüglich p). Die Anwendung des obigen Induktionsanfangs $m = 1$ auf die Gleichung (10.13) liefert die m -malige stetige Differenzierbarkeit von $(D_1x^*)(\cdot, t_0)$, d.h. es gilt $x^*(\cdot, t_0) \in \mathcal{C}^{m+1}(\mathcal{P}, \mathcal{X})$.

(II) Behauptung: Für jedes $p_0 \in \mathcal{P}$ ist die Abbildung $x^*(p_0, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ m -mal rd-stetig differenzierbar.

Begründung: Es seien $p_0 \in \mathcal{P}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ fest vorgegeben. Die rechte Seite der Gleichung (10.7) hängt rd-stetig von t ab und ist wegen (10.8) eine gleichmäßige Kontraktion in (p, t) ; zur rd-Stetigkeit beachte man hierbei das Beispiel 7.6 und den Satz 7.5(a). Wegen Korollar 10.7 hängt ihre eindeutige Lösung $x(p_0, t) \in \mathcal{X}$ dann auch rd-stetig von t ab. Es sei jetzt $n = 1$. Da die Abbildung $f(x^*(p_0, t_0); p_0, \cdot)$ nach Voraussetzung (ii) differenzierbar, also insbesondere stetig ist, muss daher auch $x^*(p_0, \cdot)$ wegen Korollar 10.6(c) stetig in t_0 sein. Aufgrund Satz 6.7(a) ist $x^*(p_0, \cdot)$ daher zum Zeitpunkt $t_0 \in RS(\mathbb{T})$ differenzierbar und die Ableitung $(\Delta_2x^*)(p_0, t_0) \in \mathcal{X}$ erfüllt auch die Fixpunktgleichung (10.7), denn es gilt

$$\begin{aligned} (\Delta_2x^*)(p_0, t_0) &\stackrel{(6.3)}{=} \frac{x^*(p_0, \rho^+(t_0)) - x^*(p_0, t_0)}{\mu^*(t_0)} = \\ &= \frac{f(x^*(p_0, \rho^+(t_0)); p_0, \rho^+(t_0)) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)}{\mu^*(t_0)} = \\ &= \frac{f(x^*(p_0, \rho^+(t_0)); p_0, \rho^+(t_0)) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, \rho^+(t_0))}{\mu^*(t_0)} + \\ &\quad + \frac{f(x^*(p_0, t_0); p_0, \rho^+(t_0)) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)}{\mu^*(t_0)} = \\ &\stackrel{(6.3)}{=} \left[\int_0^1 (D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s(x^*(p_0, \rho^+(t_0)) - x^*(p_0, t_0)); p_0, \rho^+(t_0)) ds \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{x^*(p_0, \rho^+(t_0)) - x^*(p_0, t_0)}{\mu^*(t)} + (\Delta_3f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) = \\ &\stackrel{(6.3)}{=} \left[\int_0^1 (D_1f)(x^*(p_0, t_0) + s\mu^*(t_0)(\Delta_2x^*)(p_0, t_0); p_0, \rho^+(t_0)) ds \right] (\Delta_2x^*)(p_0, t_0) + \\ &\quad + (\Delta_3f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0). \end{aligned}$$

Nun sei $t_0 \in RD(\mathbb{T})$ und folglich nimmt die Gleichung (10.7) wegen $\mu^*(t_0) = 0$ die Form

$$x = (D_1f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)x + (\Delta_3f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) \quad (10.14)$$

an. Nach Definition der Differenzierbarkeit (vergleiche LANG [35, p. 333]) existiert auf einer Nullumgebung $U_1 \subseteq \mathcal{X}$ eine Funktion $r : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass f die Darstellung

$$f(x+h; p_0, t) - f(x; p_0, t) = [(D_1f)(x; p_0, t) + r(h)]h \quad (10.15)$$

besitzt, wobei für das Restglied $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ gilt. Andererseits gibt es wegen Satz 6.7(b) eine auf einer \mathbb{T} -Umgebung U_2 von t_0 definierte Funktion $\psi(\cdot, t_0) : U_2 \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$f(x; p_0, t) - f(x; p_0, t_0) = \mu(t, t_0) [(\Delta_3f)(x; p_0, t_0) + \psi(t, t_0)] \quad (10.16)$$

und $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t, t_0) = 0$. Es sei nun $\varepsilon \in (0, \frac{1-L}{2})$ beliebig vorgegeben und $U_1 \subseteq \mathcal{X}$, $U_2 \subseteq \mathbb{T}$ o.B.d.A. so klein gewählt, dass

$$|r(h)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } h \in U_1, \quad \|\psi(t, t_0)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in U_2 \quad (10.17)$$

gilt. Mit der Abkürzung $\gamma(t, t_0) := x^*(p_0, t) - x^*(p_0, t_0)$ erhält man dann die Gleichung

$$\begin{aligned}
\gamma(t, t_0) &= f(x^*(p_0, t); p_0, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) = \\
&= f(x^*(p_0, t_0) + \gamma(t, t_0); p_0, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t) + \\
&\quad + f(x^*(p_0, t_0); p_0, t) - f(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) = \\
&\stackrel{(10.15),}{=} \stackrel{(10.16)}{=} (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t) \gamma(t, t_0) + \mu(t, t_0) (\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) + \\
&\quad + r(\gamma(t, t_0)) \gamma(t, t_0) + \mu(t, t_0) \psi(t, t_0)
\end{aligned} \tag{10.18}$$

und Übergang zur Norm liefert

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t, t_0)\| &= \|(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\gamma(t, t_0)\| + |\mu(t, t_0)| \|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \\
&\quad + |r(\gamma(t, t_0))| \|\gamma(t, t_0)\| + |\mu(t, t_0)| \|\psi(t, t_0)\| \leq \\
&\stackrel{(10.8)}{\leq} (L + |r(\gamma(t, t_0))|) \|\gamma(t, t_0)\| + \\
&\quad + |\mu(t, t_0)| (\|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \|\psi(t, t_0)\|) \leq \\
&\stackrel{(10.17)}{\leq} (L + \varepsilon) \|\gamma(t, t_0)\| + |\mu(t, t_0)| (\|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \varepsilon),
\end{aligned}$$

falls U_2 so klein gewählt wird, dass $\gamma(t, t_0) \in U_1$ ist, was wegen der Stetigkeit von $x^*(p_0, \cdot)$ in rechts-dichten Punkten $t_0 \in \mathbb{T}$ möglich ist. Löst man die letzte Ungleichung nach $\|\gamma(t, t_0)\|$ auf, so folgt

$$\|\gamma(t, t_0)\| \leq \frac{1}{1 - L - \varepsilon} (\|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \varepsilon) |\mu(t, t_0)|, \tag{10.19}$$

wobei die rechte Seite wegen $\varepsilon < \frac{1-L}{2}$ nicht negativ ist. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0) &\stackrel{(10.18)}{=} (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t) \gamma(t, t_0) + \mu(t, t_0) (\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) + \\
&\quad + r(\gamma(t, t_0)) \gamma(t, t_0) + \mu(t, t_0) \psi(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0) = \\
&\stackrel{(10.14)}{=} [(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t) - (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)] \gamma(t, t_0) + \\
&\quad + (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0) [\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)] + \\
&\quad + r(\gamma(t, t_0)) \gamma(t, t_0) + \mu(t, t_0) \psi(t, t_0)
\end{aligned} \tag{10.20}$$

und weil $(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ im t_0 stetig ist, existiert eine Nullumgebung $\tilde{U}_1 \subseteq U_1$ mit

$$\|(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t) - (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in \tilde{U}_1.$$

Normweise ergibt sich daraus mittels (10.20)

$$\begin{aligned}
&\|\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)\| \leq \\
&\leq \|(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t) - (D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\gamma(t, t_0)\| + \\
&\quad + \|(D_1 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \|\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)\| + \\
&\quad + |r(\gamma(t, t_0))| \|\gamma(t, t_0)\| + |\mu(t, t_0)| \|\psi(t, t_0)\| \leq \\
&\stackrel{(10.17)}{\leq} \varepsilon \|\gamma(t, t_0)\| + L \|\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)\| + \varepsilon \|\gamma(t, t_0)\| + \varepsilon |\mu(t, t_0)|
\end{aligned}$$

und damit

$$\|\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - L} [2 \|\gamma(t, t_0)\| + |\mu(t, t_0)|].$$

Aus dieser Abschätzung resultiert schließlich, indem man $\varepsilon > 0$ nach oben durch $\frac{1-L}{2}$ abschätzt, die

Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \|\gamma(t, t_0) - \mu(t, t_0)x(p_0, t_0)\| \leq \\
(10.19) \quad & \leq \frac{\varepsilon}{1-L} \left[\frac{2}{1-L-\varepsilon} (\|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \varepsilon) + 1 \right] |\mu(t, t_0)| \leq \\
& \leq \varepsilon \left[\frac{4}{(1-L)^2} \|(\Delta_3 f)(x^*(p_0, t_0); p_0, t_0)\| + \frac{3}{1-L} \right] |\mu(t, t_0)| = \\
& = \varepsilon C_2(p_0, t_0, L) |\mu(t, t_0)| \quad \text{für alle } t \in \tilde{U}_2
\end{aligned}$$

mit einer nur von $p_0 \in \mathcal{P}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ und $L \in (0, 1]_{\mathbb{R}}$ abhängigen Konstanten $C_2(p_0, t_0, L) > 0$. Laut Definition 6.1 ist $x^*(p_0, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{X}$ damit differenzierbar im beliebig vorgegebenen Punkt $t_0 \in \mathbb{T}$ mit rd-stetiger Ableitung $x(p_0, \cdot)$. Den Beweisteil beendend gilt also $x^*(p_0, \cdot) \in \mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathcal{X})$.

(c) Die Aussage (c) ist eine unmittelbare Konsequenz der obigen Überlegungen. #

Bemerkung 10.10: Die Argumentation in Schritt (I) im obigen Beweisteil (b) ist nach einem Resultat aus PÖTZSCHE [38, pp. 157–160, Satz A.4.4] modelliert, welches wiederum einen Spezialfall von VANDERBAUWHEDE & VAN GILS [42, Theorem 3] darstellt. Der Schritt (II) konnte nicht ganz so kurz geführt werden, da auf beliebigen Maßketten kein Mittelwertsatz in Integralform existiert. Statt dessen musste mittels der Charakterisierung der Differenzierbarkeit aus dem Satz 6.7(b) argumentiert werden.

Beispiel 10.11: Die beiden Abbildungen $f(\cdot; p, t), f^{t_1}(\cdot; p, t) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ müssen keineswegs den gleichen Fixpunkt besitzen. Man betrachte auf der Zeitskala $\mathbb{T} = \mathbb{Z} + [0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ etwa die rd-stetig von t abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x; p, t) := \mu^*(t)x + p$ mit der rd-stetigen Fixpunktfunktion

$$x_1^*(p, t) = \frac{p}{1 - \mu^*(t)} = \begin{cases} p & \text{für } t \in RD(\mathbb{T}) \\ 2p & \text{für } t \in RS(\mathbb{T}) \end{cases},$$

wogegen das stetige $f^{t_1}(x; p, t) = p$ die stetige Fixpunktfunktion $x_2^*(p, t) = p$ für alle $t \in \mathbb{T}$ besitzt.

A Symbolverzeichnis

Wir fassen hier einige speziell in dieser Arbeit eingeführte Notationen zusammen:

Symbol	Beschreibung	Seite
Spezielle Abbildungen:		
ρ^+	Sprungoperator	5
ρ^-	Rücksprungoperator	5
μ	Wachstumseichung	13
$\Delta_+ x$	Vorwärts-Differenzenoperator	16
μ^*	Körnigkeit	17
f^Δ	Ableitung von f	22
$\Delta_k F$	partielle Ableitung	22
X^*	Bild von X unter einer Involution \cdot^*	27
$\int_{t_1}^{t_2} f, \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Delta t$	Cauchy-Integral	36
\mathbb{R}_h	verallgemeinerte Realteil-Projektion	47
\mathbb{R}	verallgemeinerter Realteil	48
\mathbb{S}_h	verallgemeinerte Imaginärteil-Projektion	47
\mathbb{S}	verallgemeinerter Imaginärteil	48
ξ_h		47
ϑ_h		47
e_a	(komplexe) Exponentialfunktion	49
$ a $	Infimum einer Funktion a	51
Spezielle Mengen:		
\mathbb{T}	Zeitmenge	1
(\mathbb{T}, \preceq)	Kette	1
\mathbb{T}_τ^-	rechts-beschränktes \mathbb{T} -Intervall	1
\mathbb{T}_τ^+	links-beschränktes \mathbb{T} -Intervall	1
$(r, s)_\mathbb{T}$	offenes \mathbb{T} -Intervall	1
$[r, s)_\mathbb{T}$	halboffenes \mathbb{T} -Intervall	1
$(r, s]_\mathbb{T}$	halboffenes \mathbb{T} -Intervall	1
$[r, s]_\mathbb{T}$	abgeschlossenes \mathbb{T} -Intervall	1
$(a, \infty)_\mathbb{T}$	offenes links-beschränktes \mathbb{T} -Intervall	3
$(-\infty, b)_\mathbb{T}$	offenes rechts-beschränktes \mathbb{T} -Intervall	3
$\mathcal{B}_\mathbb{T}$	Basis der Ordnungstopologie	3
$RD(\mathbb{T})$	rechts-dichte Punkte von \mathbb{T}	6
$RS(\mathbb{T})$	rechts-zerstreute Punkte von \mathbb{T}	6
$LD(\mathbb{T})$	links-dichte Punkte von \mathbb{T}	6
$LS(\mathbb{T})$	links-zerstreute Punkte von \mathbb{T}	6
$(\mathbb{T}, \preceq, \mu)$	Maßkette	13
S^κ	nicht-ausgearteten Punkte von S	17
S_x	Wertebereich einer Folge x als Zeitskala	19
\mathbb{C}_h	verallgemeinerte komplexe Ebene	46
\mathbb{R}_h	verallgemeinerte reelle Achse	46
\mathbb{S}_h	verallgemeinerte imaginäre Achse	47
Funktionsräume:		
$\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$	Raum der einfachen Abbildungen	34
$\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{X})$	rd-stetige Abbildungen	34
$\mathcal{C}_{rd}(\mathcal{X} \times \mathcal{P} \times \mathbb{T}, \mathcal{X})$	rd-stetige rechte Seiten	60
$\mathcal{C}_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathcal{X})$	rd-stetig-differenzierbare Abbildungen	37
$\mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$	regressive Gruppe (in \mathbb{C})	48
$\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	positiv-regressive Gruppe	48
$\mathcal{C}_{rd}\mathcal{S}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$		48
Relationen und algebraische Verknüpfungen:		
\preceq	lineare Ordnung auf \mathbb{T}	1
\prec	Relation auf \mathbb{T}	1
\trianglelefteq	dynamisch-kleiner-gleich auf $\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	51
\triangleleft	dynamisch-kleiner auf $\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	51
\oplus_h	Addition auf \mathbb{C}_h	46
\oplus	Addition auf $\mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$	48
\ominus_h	Subtraktion auf \mathbb{C}_h	46
\ominus	Subtraktion auf $\mathcal{C}_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$	48
\odot_h	Multiplikation auf \mathbb{C}_h und \mathbb{R}_h	46, 48
\odot	Multiplikation auf $\mathcal{C}_{rd}^+\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	48
Sonstiges:		
$-\infty, \infty$	universelle Schranken von \mathbb{T}	2
$\sup_{\mathbb{T}} S$	\mathbb{T} -Supremum von S	2
$\inf_{\mathbb{T}} S$	\mathbb{T} -Infimum von S	2
$\max_{\mathbb{T}} S$	\mathbb{T} -Maximum von S	2
$\min_{\mathbb{T}} S$	\mathbb{T} -Minimum von S	2

Literaturverzeichnis

- [1] R.P. AGARWAL, *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.
- [2] R.P. AGARWAL AND M. BOHNER, *Basic calculus on time scales and some of its applications*, Results in Mathematics, 35(1) (1999), pp. 3–22.
- [3] H. AMANN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1995.
- [4] D. ANDERSON AND A. PETERSON, *Asymptotic properties of solutions of a $2n^{\text{th}}$ order differential equation on a time scale*, Math. Comput. Modelling, 35(5–6) (2000), pp. 653–660.
- [5] B. AULBACH, *Analysis auf Zeitmengen*, Ausarbeitung eines Proseminars, Universität Augsburg, 1990.
- [6] B. AULBACH AND S. HILGER, *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale*, in Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems, G. Leonov, V. Reitmann, W. Timmermann, ed., Mathematical Research Bd. 59, Akademie-Verlag, Berlin, 1990, pp. 9–20.
- [7] ———, *A unified approach to continuous and discrete dynamics*, in Differential equations: qualitative theory, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 48, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1991.
- [8] M. BOHNER AND D.A. LUTZ, *Asymptotic behavior of dynamic equations on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications, 7(1) (2001), pp. 21–50.
- [9] M. BOHNER AND A. PETERSON, *Linear Differential Equations on Measure Chains*, Manuscript, URL: <http://www.umr.edu/~bohner/pub.html>.
- [10] ———, *Dynamic Equations on Time Scales — An Introduction with Applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2001.
- [11] S.-N. CHOW AND J.K. HALE, *Methods of Bifurcation Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 251, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.
- [12] J. DIEUDONNÉ, *Grundzüge der modernen Analysis*, Bd. 1, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1971.
- [13] ———, *Grundzüge der modernen Analysis*, Bd. 2, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1987.
- [14] A. DÖFFINGER, *Theorie dynamischer Gleichungen — ein einheitlicher Zugang zur kontinuierlichen und diskreten Dynamik*, Diplomarbeit, Universität Augsburg, 1995.
- [15] L. ERBE AND S. HILGER, *Sturmian theory on measure chains*, Differential Equations and Dynamical Systems, 2 (1993), pp. 223–246.
- [16] L. ERBE AND A. PETERSON, *Green's functions and comparison theorems for differential equations on measure chains*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, 6(1) (1999), pp. 121–137.
- [17] ———, *Positive solutions for a nonlinear differential equations on a measure chains*, Math. Comput. Modelling, 35(5–6) (2000), pp. 571–585.

- [18] J. FÜHRER, *Allgemeine Topologie mit Anwendungen*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1977.
- [19] J.K. HALE, *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington-New York, 1980.
- [20] S. HILGER, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Dissertation, Universität Würzburg, 1988.
- [21] ———, *Der Maßkettenkalkül — ein vereinheitlichter Zugang zu Differential- und Differenzgleichungen*, Preprint No. 213, Universität Augsburg, 1989.
- [22] ———, *Analysis on measure chains — A unified approach to continuous and discrete calculus*, Results in Mathematics, 18 (1990), pp. 18–56.
- [23] ———, *Smoothness of invariant manifolds*, Journal of Functional Analysis, 106(1) (1992), pp. 95–129.
- [24] ———, *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*, Journal of the Australian Mathematical Society, Series A, 60 (1996), pp. 157–191.
- [25] ———, *Differential and difference calculus — unified!*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 30(5) (1997), pp. 2386–2694.
- [26] ———, *Special Functions, Laplace and Fourier Transform on Measure Chains*, Preprint 98-009, Katholische Universität Eichstätt, 1998.
- [27] S. HILGER AND P.E. KLOEDEN, *Comparative time grainyness and asymptotic stability of dynamical systems*, Preprint, School of Computing and Mathematics, Deakin University, Australia, 1993.
- [28] ———, *Vlijanje vremenoj zernitosti na asimptotickuju ustojcivost' dinamičeskih sistem avtomatičca i telemečanica*, H, 4 (1994), pp. 68–74. (Vergleichende Zeitkörnigkeit und asymptotische Stabilität dynamischer Gleichungen).
- [29] B. KAYMAKÇALAN, *Existence and comparison results for dynamic systems on a time scale*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 172 (1993), pp. 243–255.
- [30] S. KELLER, *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis auf Zeitskalen*, Dissertation, Universität Augsburg, 1999.
- [31] V. LAKSHMIKANTHAM AND S. SIVASUNDARAM, *Stability of moving invariant sets and uncertain dynamic systems on time scales*, Computers & Mathematics with Applications, 34(10–12) (1998), pp. 339–346.
- [32] V. LAKSHMIKANTHAM AND D. TRIGIANTE, *Theory of Difference-Equations: Numerical Methods and Applications*, Mathematics in Science and Engineering, 181, Academic Press, Boston-New York-San Diego, 1988.
- [33] V. LAKSHMIKANTHAM, D.D. BAINOV AND P.S. SIMEONOV, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Series in Modern Applied Mathematics, Vol. 6, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1989.
- [34] V. LAKSHMIKANTHAM, S. SIVASUNDARAM AND B. KAYMAKÇALAN, *Dynamic Systems on Measure Chains*, Mathematics and Its Applications, Vol. 370, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1996.
- [35] S. LANG, *Real and Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 142, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.
- [36] J. R. MUNKRES, *Topology — a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

- [37] S.A. ÖZGÜN, A. ZAFER AND B. KAYMAKÇALAN, *Gronwall and Bihari type inequalities on time scales*, in *Advances in Difference Equations: Proceedings of the Second International Conference of Difference Equations*, S. N. Elaydi, I. Györgi and G. Ladas, ed., Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995, Gordon and Breach, London, 1997, pp. 481–490.
- [38] C. PÖTZSCHE, *Nichtautonome Differenzgleichungen mit invarianten und stationären Mannigfaltigkeiten*, Diplomarbeit, Universität Augsburg, 1998.
- [39] B. V. QUERENBURG, *Mengentheoretische Topologie*, Springer Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 1979.
- [40] S. SAILER, *Riemann-Stieltjes-Integral auf Zeitmengen*, Zulassungsarbeit, Universität Augsburg, 1993.
- [41] S. SIEGMUND, *Zur Differenzierbarkeit von Integralmannigfaltigkeiten*, Diplomarbeit, Universität Augsburg, 1996.
- [42] A. VANDERBAUWHEDE AND S.A. VAN GILS, *Center manifolds and contractions on a scale of Banach spaces*, *Journal of Functional Analysis*, 72 (1987), pp. 209–224.
- [43] A. ZAFER, B. KAYMAKÇALAN AND S.A. ÖZGÜN, *Asymptotic behavior of higher-order nonlinear equation on time scales*, *Computers & Mathematics with Applications*, 36(10–12) (1998), pp. 299–306.

Index

Symbole

- $I \setminus O$ -Teilmenge, 11
 - Charakterisierung, 11
- K_δ -Raum, 15
- κ -Operator, 17
- T-beschränkt, 2
 - nach oben, 2
 - nach unten, 2
- T-Infimum, 2
- T-Intervall
 - abgeschlossenes, 1
 - halboffenes, 1
 - offenes, 1
- T-kompakt, 21
- T-Maximum, 2
- T-Minimum, 2
- T-Schranke
 - obere, 2
 - untere, 2
- T-Supremum, 2

A

- Ableitung, 22, 28
 - elementare Eigenschaften, 23
 - partielle, 22
- Achse
 - imaginäre
 - verallgemeinerte, 47
 - reelle
 - verallgemeinerte, 46

B

- Bernoulli-Shift, 22, 34

C

- Cauchy-Integral, 36
 - Eigenschaften, 38

D

- Differenziations-Bereich, 28
- Differenziations-Regeln, 25
- differenzierbar, 22, 22ff, 28
- dynamisch
 - kleiner, 51
 - kleiner-gleich, 51

E

- Ebene
 - komplexe
 - verallgemeinerte, 46
- einfach, 34
- Exponentialfunktion, 46ff, 49
 - asymptotisches Verhalten, 53
- Eigenschaften, 50
 - dynamische, 49
- reelle, 51

G

- Grenzwert, 16
 - linksseitiger, 16
 - rechtseitiger, 16
 - uneigentlicher, 16
- Gronwall-Lemma, 56
- Gruppe
 - positiv-regressive, 48
 - regressive, 48

I

- Imaginärteil
 - verallgemeinerter, 49
- Imaginärteil-Projektion
 - verallgemeinerte, 47
- Induktionsprinzip, 9
 - duales, 9
- Integralungleichungen, 56ff
- Integration, 34ff
 - durch Substitution, 38
 - partielle, 38
- Involution, 27
- Isotonie
 - strenge, 13

K

- Kette, 1, 1ff
 - bedingt-vollständige, 8
 - Umgebungsbasis, 7
- Kettenregel, 25
- Knoten, 9
- Kontraktion, 61
 - gleichmäßige, 61, 62
- Kontraktionsprinzip, 60ff, 61
 - gleichmäßiges, 61

- Kozyklus-Eigenschaft
 der Exponentialfunktion, 49
 der Wachstumseichung, 13
Körnigkeit, 17
- M**
Maßkette, 8ff, 13
 beidseitig unbeschränkte, 14
 nach oben unbeschränkte, 14
 nach unten unbeschränkte, 14
 Topologie, 15
 unbeschränkte, 14
Maßkettenhomomorphismus, 14
Maßkettenisomorphismus, 15
Mittelwertsatz, 28
 für reellwertige Funktionen, 31
- N**
nicht-ausgeartet, 17
- O**
Ordnung
 dynamische, 51
 lineare, 1
Ordnungstopologie, 3, 3ff
 Separiertheit, 3
- P**
Parameterintegrale, 41
 Differenzierbarkeit in \mathcal{P} , 42
 Differenzierbarkeit in \mathbb{T} , 42
 uneigentliche, 44
Produktregel, 25
Punkt
 links-dichter, 5
 links-zerstreut, 5
 nicht-ausgearteter, 17
 rechts-dichter, 5
 rechts-zerstreut, 5
- R**
Raum
 positiv-regressiver, 48
rd-stetig, 34, 60
 differenzierbar, 37
Realteil
 verallgemeinerter, 49
Realteil-Projektion
 verallgemeinerte, 47
Regel
 von de l'Hospital, 39
Reziprokenregel, 25
Rücksprungoperator, 5
- S**
Sprungoperator, 5, 5ff
- Stammfunktion, 34ff, 37
 Existenz, 37
Summation
 Abel'sche, 39
Summenregel, 25
- T**
Teilkette, 1
Teilmaßkette, 14
Tripel
 dynamisches, 22
- U**
Ungleichung
 Bernoulli'sche, 52
 Dichotomie-, 58
 Gronwall-, 56, 57
- V**
Vor-Ableitung, 28
Vor-Stammfunktion, 35
vordifferenzierbar, 28
- W**
Wachstumseichung, 13
- Z**
Zeitmenge, 13
Zeitpunkte, 13
Zeitskala, 19, 19ff
 Abgeschlossenheit, 21
 Beschränktheit, 20
 homogene, 19
 inhomogene, 19
 Offenheit, 20
Zwischenwertsatz, 9