

Pilottestung der Standard-Orientierungsaufgaben
für die mathematischen Fähigkeiten
der österreichischen Schülerinnen und Schüler
am Ende der 8. Schulstufe

FEHLERANALYSE

Gerda Jurkowitsch & René Scheriau

Institut für Didaktik der Mathematik
- Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik -
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Klagenfurt, August 2007

Inhaltsbereich I1 „Zahlen und Maße“

I1/H1/K1 Darstellung einer Zahl

Es ist auffallend, dass bei fehlerhaften Lösungen häufig zwar mit 35/1000 eine der beiden richtigen Zahlen gefunden wurde, dann aber keine weitere Zahl oder mit 0,35% oder 35% eine falsche Zahl angekreuzt wurde.

Ein weiterer Fehler, der ebenso vermehrt auftrat, war $0,035 = 35/100$.

I1/H1/K2 Messbecher

Keine Auffälligkeiten.

I1/H1/K3 Zehnerpotenzen

Keine Auffälligkeiten; insgesamt nur wenig falsche Antworten.

I1/H2/K1 Zinsen

Unter den fehlerhaften Lösungen gibt es viele unterschiedliche Antworten, die zum Teil nicht nachvollziehbar sind, da der Lösungsweg oft nicht angegeben wurde. In jenen Fällen, in denen eine Formel angegeben wurde, ist erkennbar, dass einige Fehler auf fehlerhafte Formeln zurückzuführen sind, wie etwa Multiplikation mit 12 (offenbar für Monate), Division durch 360 bzw. 365 (offenbar für Tage).

I1/H2/K2 Container

Viele fehlerhafte Lösungen sind nur schwer nachvollziehbar, da der Rechenweg nicht angeschrieben wurde.

Viele Fehler traten im Zusammenhang mit den Maßeinheiten auf. Meist wurde dabei das (zahlenmäßig richtige oder auch falsche) Ergebnis im m^3 (und nicht wie gefordert in l) angegeben.

Auffallend sind auch Schwierigkeiten im Umgang mit der Messgenauigkeit. Häufig wurden nur die obere oder untere Grenze ermittelt und die zweite Grenze mit 37500 l festgehalten.

In manchen Fällen wurde der Messfehler von $\pm 1\%$ nur auf das Gesamtvolumen (und nicht auf jede der drei Seitenlängen) bezogen.

Insgesamt gilt, dass fehlerhafte Lösungen oft eine Kombination verschiedener Fehler beinhalteten

I1/H2/K3 Verschiedene Lösungswege

Besonders häufig wurden die Lösungswege A und C falsch bewertet. Auch Lösungsweg D wurde oft falsch bewertet, bei Lösungsweg B war dies nur selten der Fall. Während von den S&S in der AHS sowie 1. LG und 2. LG eher nur ein Lösungsweg falsch bewertet wurde, waren bei S&S der 3. LG eher mehrere Bewertungen falsch.

I1/H3/K1 Busfahrplan

Die Antworten 9.39 Uhr und auch 8.39 Uhr traten vermehrt auf.

(Auf 8.39 kommt man, wenn man das Umsteigen nicht berücksichtigt und nur einen Fahrplan zur Ermittlung des Wertes heranzieht.)

I1/H3/K2 Rechnung in einem Restaurant

Fast alle Antworten waren so formuliert, als würde die Aufgabe lauten: „Wie viele € müssen die anderen drei Freunde (außer Max) zahlen?“ bzw. seltener „Wie viele € müssen Max und seine drei Freunde bezahlen?“

Es wurde auch eher ein Antwortsatz (zum Rechenergebnis) formuliert, als eine Geschichte zum gegebenen Term.

I1/H3/K3 Bildungstand der Österreicherinnen und Österreicher

Die Aussagen A, B und D wurden häufig falsch bewertet (60% - 70% der fehlerhaften Lösungen), Aussage C etwas seltener (ca. 40%).

I1/H4/K1 Potenzen

Keine Auffälligkeiten.

I1/H4/K2 Größenvergleich

Sehr oft fehlte die Darstellung der beiden Zahlen auf der Zahlengeraden und die Begründung wurde ohne diese Darstellung versucht.

Als „Begründung“ wurde sehr oft nur "ist einfach größer" oder auch "ist gar nicht größer" angeführt.

In einigen Fällen argumentierten die S&S auch mittels Darstellung der Zahlen in Dezimalschreibweise oder als gleichnamige Brüche.

I1/H4/K3 Irrationale Zahlen

Es gibt kaum markante Auffälligkeiten. Am häufigsten wurde Argument C (Darstellung auf der Zahlengeraden) falsch bewertet, am seltensten Argument D. Die falschen Bewertungen bei den Argumenten A und B hielten sich in etwa die Waage (sie traten bei ca. 50% der fehlerhaften Lösungen auf).

Inhaltsbereich I2 „Variable, funktionale Abhängigkeiten“

I2/H1/K1 Taschengeld

Bei den S&S der AHS und 1. LG basierte die fehlerhafte Lösung meist auf der Darstellung der falschen Beziehung $m+5=f$.

Die S&S der 2. LG und 3. LG gaben sehr unterschiedliche Terme an.

I2/H1/K2 Stromtarif

Wenn es sich bei der von den S&S erstellten Grafik um den Graphen einer linearen Funktion handelte, so verlief dieser zumeist durch den Koordinatenursprung. Teilweise wurden die Achsen vertauscht.

Es wurden durch alle Schultypen hinweg ebenso verschiedene nichtlineare Diagramme, teilweise auch andere Darstellungstypen (Stab- und Liniendiagramm) als Lösung gezeichnet.

I2/H1/K3 Straßenbau

Die falschen Bewertungen betrafen ausschließlich die Aussagen A (Anna) und B (Bernd), bei Aussage C (Chris) traten keine falschen Bewertungen auf.

I2/H2/K1 Gleichungssystem

Oft sind keine Rechnungen zum Nachvollziehen der Fehler vorhanden. Wenn (vereinzelt) Rechenwege in verschriftlichter Form vorliegen, sind Fehler bei Äquivalenzumformungen zu erkennen.

I2/H2/K2 Frequenz

Das Ergebnis wurde sehr häufig ohne Maßeinheiten angegeben, wobei das Ergebnis dabei häufig in „falschen“ Einheiten ermittelt wurde.

Die Umwandlungen von Maßeinheiten (m auf km und umgekehrt) waren meist falsch.

Der Wert 29970000 bzw. Varianten davon, denen andere Einheiten zugrunde liegen, wurden häufiger als Ergebnis angeführt. Dieser Fehler basiert auf einer nicht korrekten Äquivalenzumformung. Es wurde mit dem falschen Term $l = f \cdot c$ (und nicht mit dem korrekten Term $l = c/f$) gearbeitet.

Der Wert 3003 wurde ebenfalls mehrmals als Lösung angeführt. In diesem Fall wurde statt mit 99,9 Mio Hertz mit 99,9 Hertz gerechnet.

Ebenfalls öfters wurden die Werte 333 bzw. 0,000333 als Lösung angegeben. Hier wurde im Ausdruck $f=c/l$ durch c dividiert. Beim Ergebnis 0,000333 wurde zusätzlich mit 99,9 Hertz (anstatt 99,9 Mio Hertz) gerechnet.

Insgesamt traten fast nur Umwandlungs- und Umformungsfehler auf.

I2/H2/K3 Zylinder

„6 Mal so viel“ kommt als falsche Antwort auffällig oft (17 von 37) vor. Dabei ist der Anteil dieser falschen Antwort unter den fehlerhaften Antworten der S&S der AHS besonders hoch (ca. $\frac{2}{3}$ der falschen AHS-Antworten). Der Fehler könnte hier darin liegen, dass das Quadrat beim Radius nicht berücksichtigt und $2 \cdot 3 = 6$ als richtige Antwort angenommen wurde.

I2/H3/K1 Lehrstellensuchende

Die meisten fehlerhaften Lösungen liegen im Intervall [7500; 8000] (vermutlich hohe Ungenauigkeit beim Ablesen). Der Wert 7500 tritt dabei häufiger auf (ev. aufgrund der Markierung der Grafik an dieser Stelle).

Andere falsche Lösungen sind vorrangig bei den S&S der HS zu finden. Sie sind nicht nachvollziehbar.

I2/H3/K2 Handytarif

Die fehlerhaften Lösungen sind zum Teil sehr unterschiedlich.

Eine leichte Häufung der fehlerhaften Lösungen gibt es bei den Werten 12 bzw. 0,12. Hier könnte „Gesprächsgebühr“ mit „Grundgebühr“ verwechselt worden sein.

I2/H3/K3 Mädchen in der Überzahl

Ca. zwei Drittel der fehlerhaften Lösungen ist "mindestens 16". Hier könnte das „echt größer“ vernachlässigt worden sein.

Bei den S&S der 2. LG und 3. LG trat vermehrt auch eine Verwechslung von „höchstens“ und „mindestens“ auf.

I2/H4/K1 Binomische Formel

Bei den fehlerhaften Lösungen wurde oft dahingehend "argumentiert", dass „immer dasselbe Ergebnis herauskommt“.

I2/H4/K2 Wandertag

Die fehlerhafte Lösung "gleich teuer" kommt oft vor. Manchmal wurde diese Antwort (obwohl bereits in der Angabe vorgegeben) nach operativen Berechnungen beider Tarife für 60 km gegeben.

Teilweise gibt es zwar richtige Antworten bzgl. der Entscheidung, diese wurde aber nicht begründet.

I2/H4/K3 Eintrittspreise

Auffällig ist, dass bei der Bewertung der zweiten Argumentation (Herr Carl) weniger Fehler auftraten als im Vergleich dazu bei den Bewertungen der Argumentation A (Hr. Auer) und noch etwas häufiger bei der Bewertung der Argumentation C (Frau Damm).

Inhaltsbereich I3 „Geometrische Figuren und Körper“

I3/H1/K1 Dreieck

Die Eigenschaft gleichschenkelig wurde meist noch korrekt umgesetzt, aber anstatt eines stumpfwinkligen wurde eher ein spitzwinkliges oder seltener auch ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet.

I3/H1/K2 Gardasee

Bei vielen falschen Lösungen ist der Fehler nicht nachvollziehbar; es wurden sehr unterschiedliche Zahlen mit einer sehr großen Spannweite (10 – 9765625 km²) als Schätzwerte angegeben.

Einige versuchten die Fläche mit einem einzigen Rechteck anzunähern, wodurch die Schätzungen zu ungenau wurden.

Aufgetreten sind auch Maßstabsfehler.

I3/H1/K3 Schrägriss und Grundriss

Von den S&S der AHS wurden vor allem die Aussagen B und D falsch bewertet (dies sind jene Aussagen, die sich auf einen Schrägriss beziehen).

Von den S&S der 1. LG wurden die Aussagen B und C seltener falsch bewertet als die Aussagen A und D (ca. doppelt so oft).

Aussage C wurde bei fehlerhaften Lösungen am häufigsten richtig bewertet (Aussage bzgl. wahrer Längen im Grundriss).

I3/H2/K1 Gerade

Mehrmals wurde eine Parallele anstatt einer Normalen gezeichnet. Ebenfalls wurden Geraden konstruiert, die weder parallel noch normal zu g sind.

Einige S&S nahmen auch den Kasten des Aufgabentextes als Bezugssystem und zeichneten parallele oder normale Geraden zu den Seitenkanten dieses Aufgabekastens.

I3/H2/K2 Wasserfarbendruck

Viele S&S fertigten eine zu ungenaue Konstruktion an, sodass die Aufgabe als nicht korrekt eingestuft wurde.

Einige (S&S aller Schultypen) konstruierten keine Spiegelung, sondern eine Translation.

I3/H2/K3 Raute

In den meisten Fällen begannen die S&S die Dokumentation des Konstruktionsweges mit der Konstruktion einer Strecke (von 5cm) und dem Auftragen eines Winkels. Der Rest des Konstruktionsweges wurde dann (meist) nicht mehr nachvollziehbar beschrieben.

Es lässt sich bei den Beschreibungen der S&S ein Mangel an (Fach-)Vokabular erkennen, das die S&S bei solchen Konstruktionsbeschreibungen einsetzen könnten.

Es fällt auch auf, dass kaum S&S Skizzen (oder geometrische Konstruktionen) als Grundlage für die Lösung der Aufgabe anfertigten.

I3/H3/K1 Regentonne

Die deutlich häufigste falsche Lösung war „Volumen des Regenwassers“ (anstatt der korrekten Lösung „Grundfläche der Regentonne“).

I3/H3/K2 Kegel

Beim überwiegenden Teil der falschen Lösungen wird von den S&S mit „Volumen“ oder „Volumen des Kegels“ geantwortet.

I3/H3/K3 Pyramide

Die Aussage C (Christine) wurde am häufigsten falsch bewertet (häufig auch als einzige fehlerhaft bewertete Aussage).

I3/H4/K1 Rechter Winkel

Die fehlerhaften Lösungen sind von unterschiedlicher Art, oft auch nicht nachvollziehbar. Es lassen sich keine häufiger auftretenden Argumentationslinien erkennen.

I3/H4/K2 Flächeninhalt

Aus den fehlerhaften Lösungen ist erkennbar, dass die S&S große Probleme hatten, ihre Überlegungen zu verschriftlichen bzw. mathematisch genau zu formulieren (z. B. „das Dreieck“ oder „das Rechteck“ – Welches ist jeweils gemeint?). Es scheint auch am entsprechenden (Fach-)Vokabular zu fehlen, um die geometrischen Beziehungen verständlich darzustellen. Auffallend ist dabei auch, dass die S&S die Möglichkeit eigene Beschriftungen oder Hilfslinien in der Grafik einzufügen, nicht nutzen.

In einigen Lösungen wurden Rechenvorgänge beschrieben, diese blieben jedoch ohne Beziehung zur Grafik.

Einige Lösungen beinhalteten Hinweise, dass das vorliegende Trapez als ein gleichschenkliges Trapez gesehen wurde.

I3/H4/K3 Verwandte Vierecke

Die Aussage B ("Bei allen drei Vierecken sind die beiden Diagonalen gleich lang") wurde von S&S aller Schultypen besonders häufig fehlerhaft bewertet.

Inhaltsbereich I4 „Statistische Darstellungen und Kenngrößen“

I4/H1/K1 Bildungsstand der Österreicher(innen) im Jahr 2002

Die zwei auffälligsten Fehler sind die Verwendung eines Stab- oder Balkendiagramms anstatt des geforderten Streifendiagramms sowie das nicht kumulative Auftragen der Werte.

I4/H1/K2 Nächtigungen in Österreichs Fremdenverkehrsbetrieben im Winter 2004/05

Der überwiegende Fehler ist eine falsche bzw. sehr ungenaue Darstellung der Verteilung; die einzelnen Anteile wurden lediglich „ungefähr“ dargestellt. (Es wurden auch keine Anteilsberechnungen am Aufgabenblatt notiert.)

I4/H1/K3 Koalitionen

Häufig wurde nur allgemein (und damit an der eigentlichen Fragestellung vorbei) argumentiert (z. B. Kreisdiagramm ist übersichtlicher, einfacher zu verstehen, geeigneter).

I4/H2/K1 Durchschnittliche Körpergröße

In fast zwei Drittel der Fälle wurde anstelle des Medians das arithmetische Mittel berechnet, wobei hier vor allem bei S&S der 2. LG und 3. LG noch zusätzlich Berechnungsfehler (Summe wird nicht durch Anzahl der Werte der Urliste dividiert) auftraten.

Häufiger (vor allem S&S der AHS) wurde auch der Wert 198 als Lösung angegeben. (Dieser Wert steht in der (ungeordneten) Urliste in der Mitte bzw. kommt in der Urliste zweimal vor.)

I4/H2/K2 Durchschnittliches Monatsgehalt

Es traten sehr unterschiedliche falsche Lösungen auf, die aufgrund fehlender Rechnungen häufig nicht nachvollziehbar sind.

Der Wert 300 trat als Lösung durch alle Schultypen hindurch häufiger auf (dies ist übrigens genau die Differenz der beiden in der Angabe genannten durchschnittlichen Monatsgehälter).

I4/H2/K3 Tippfehler

Am deutlich häufigsten wurde die Auswahlantwort „Man kann nicht sagen, welchen Wert das arithmetische Mittel hat“ (ca. 35%) angekreuzt. Häufiger (etwas mehr als ein Viertel) wurde auch die Antwort „5160“ gewählt. (Dieser Wert entspricht einer Abweichung von 900, also der Differenz zwischen den beiden vorgegebenen Werten.)

Die Werte 4170 und 4350 wurden kaum als Antworten gewählt.

I4/H3/K1 Bevölkerungspyramide

Sehr viele S&S (vor allem aus dem AHS-Bereich) gaben Werte zwischen 450 und 500 als Lösung an. (Hier könnte die Anzahl der geschiedenen Männer nicht abgezogen worden sein.)

Die übrigen als Lösungen angegebenen Werte streuten zwischen 20 und 70035.

I4/H3/K2 Mandatsverteilung im Österreichischen Parlament

Am häufigsten wurden die Variante D („Die 3 Kleinparteien zusammen“; ca. 66%; oft auch als einzige falsche Bewertung) und die Variante B („ÖVP“ – 50%) falsch bewertet.

I4/H3/K3 PISA-Ergebnisse

Sehr viele der fehlerhaften Begründungen beziehen sich nicht auf den vorgegebenen (mathematischen) Sachverhalt oder berufen sich auf Dinge außerhalb der Mathematik (z. B. „weil es schwieriger war“, „weil die Jugendlichen viel zu faul geworden sind“).

I4/H4/K1 Arithmetisches Mittel

Die fehlerhaften Lösungen weisen oft zwar einen richtigen Ansatz auf, es fehlt dann jedoch der eigentliche Beweis. Die war vor allem bei den S&S der AHS und 1. LG der Fall.

Die Lösungen der S&S der 2. LG und 3. LG waren sehr unterschiedlich und aufgrund der vorliegenden schriftlichen Aufzeichnungen kaum nachvollziehbar.

I4/H4/K2 Bevölkerungswachstum in Österreich

Die fehlerhaften Lösungen weisen ganz unterschiedliche Argumentationen auf. Den meisten gemeinsam ist aber, dass die S&S mit nahezu beliebigen Aspekten (z.B. „weil es ab 1971 immer steigend ist“, „weil die Grafik nicht höher als 8500 ist“, „weil es nur Striche sind“) argumentierten oder sich auf Dinge außerhalb der Mathematik beriefen („weil die Menschen sterben und neue wieder geboren werden“).

I4/H4/K3 Durchschnittliches Monatsgehalt

Es fällt auf, dass bei den fehlerhaften Lösungen der S&S der AHS häufiger als bei den S&S der HS nur eine einzige der vier vorgegebenen Aussagen falsch bewertet wurde. Dabei wurde von den S&S der AHS die zutreffende Aussage B („Beim Median wirkt sich der hohe Wert 8.760,- ...“) nur selten nicht als zutreffende Aussage erkannt.

Bei den Lösungen der S&S der HS waren die fehlerhaften Bewertungen über alle Aussagen verteilt.